Institut für Dynamik und Schwingungen
Leibniz Universität Hannover

Maschinendynamik

Klausur Frühjahr 2009

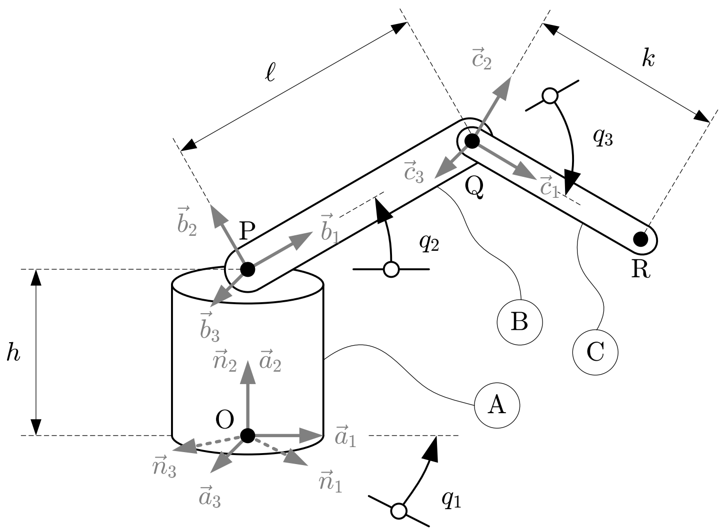
Name: ______________________________

Matrikel-Nr.: ______________________________

	Punkte
Aufgabe 1	
Aufgabe 2	
Aufgabe 3	
Aufgabe 4	
Aufgabe 5	
Aufgabe 6	
erreichte Punkte	
mögliche Punkte	60

1. Aufgabe: Vektoranalysis

10



Die Lage eines Roboterarms mit drei Drehgelenken wird über die eingezeichnete Bezugssysteme Ⓐ, Ⓑ und Ⓒ beschrieben. Das Inertialsystem wird mit Ⓝ bezeichnet. Dabei gilt:

q_1 ist der Winkel zwischen $\vec{a}_1$ und $\vec{n}_1$.	$\vec{a}_2$ und $\vec{n}_2$ sind parallel.
q_2 ist der Winkel zwischen $\vec{b}_1$ und $\vec{a}_1$.	$\vec{b}_3$ und $\vec{a}_3$ sind parallel.
q_3 ist der Winkel zwischen $\vec{c}_1$ und $\vec{b}_1$.	$\vec{c}_3$ und $\vec{b}_3$ sind parallel.

Gegeben: $h,\ l,\ k,\ q_1(t),\ q_2(t),\ q_3(t)$.

a) Bestimmen Sie Maßzahlen der Winkelgeschwindigkeiten ${}^B\vec{\omega}^C$, ${}^A\vec{\omega}^B$ und ${}^N\vec{\omega}^A$ bezüglich der Einheitsvektoren eines *jeweils frei wählbaren* Bezugssystems in Abhängigkeit der Winkel q_1, q_2, q_3 und deren Zeitableitungen! 3

b) Berechnen Sie die Winkelgeschwindigkeit ${}^N\vec{\omega}^C$, und geben Sie deren Maßzahlen bezüglich der Einheitsvektoren des Inertialsystems Ⓝ an! 2

c) Geben Sie die Maßzahlen der folgenden Ortsvektoren bezüglich der Einheitsvektoren des jeweiligen Bezugssystems an: 4

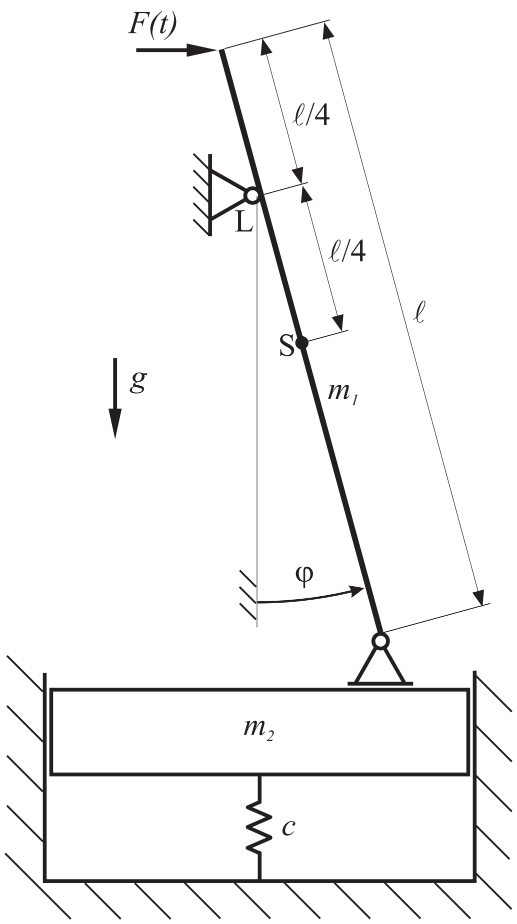
- $\overrightarrow{QR}$ in Ⓒ
- $\overrightarrow{PR}$ in Ⓑ
- $\overrightarrow{OR}$ in Ⓐ

Die Lage des Punktes R wird mit $\vec{r} = \overrightarrow{OR}$ beschrieben. Seine Geschwindigkeit im Bezugssystem Ⓐ beträgt

$$ {}^A\vec{v}^R = \frac{{}^A\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}. $$

d) Geben Sie eine Berechnungsvorschrift für die Geschwindigkeit ${}^N\vec{v}^R$ des Punktes R im Inertialsystem Ⓝ an, indem Sie die Differenz zu ${}^A\vec{v}^R$ mit Hilfe der Winkelgeschwindigkeit ${}^N\vec{\omega}^A$ ausdrücken! 1

2. Aufgabe: Lagrange'sche Gleichungen 2. Art 14



Gegeben ist das skizzierte System, bestehend aus einem drehbar gelagerten, homogenen Stab (Masse m_1, Länge l), einem Gewicht (Masse m_2) und einer Feder (Federkonstante c). Für $\varphi = 0$ ist die Feder entspannt. Es greift eine horizontale Kraft $F(t)$ wie skizziert an dem System an.

Hinweis: Verwenden Sie für die Berechnungen den Winkel φ als verallgemeinerte Koordinate. Dieser Winkel kann beliebig groß werden!

Gegeben: l, m_1, m_2, g, c, $F(t)$.

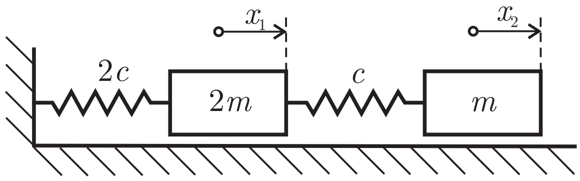
a) Bestimmen Sie die generalisierte Kraft $Q^{\text{n.k.}}$! 2

b) Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment $J^{(L)}$ des Stabes bezüglich des Lagers L! 1

c) Berechnen Sie die kinetische Energie T und die potenzielle Energie U des Systems! 5

d) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen des Systems unter Verwendung der Lagrange'schen Gleichungen 2. Art auf! 6

3. Aufgabe: Eigenwertanalyse 10



Gegeben ist eine reibungsfrei gelagerte Schwingerkette mit zwei Massen und zwei Federn.

Gegeben: c, m.

a) Geben Sie die Bewegungsgleichungen in Matrizenform an! Verwenden Sie dabei den Vektor der verallgemeinerten Koordinaten $\vec{x}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}$. 2

b) Berechnen Sie die Eigenwerte des Systems! 3

c) Berechnen Sie die dazugehörigen Eigenvektoren! 2

Zwischen den beiden Massen wird ein Dämpfer d eingesetzt.

d) Wie lautet die Dämpfungsmatrix? 1

e) Gelingt mit den zuvor berechneten Eigenvektoren die Entkopplung des nichtkonservativen Systems? Begründen Sie Ihre Antwort stichpunktartig! 2

4. Aufgabe: Modale Entkopplung

8

Die Bewegungsgleichungen eines Systems sind mit

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c & -c \\ -c & 2c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{F}\cos(\Omega t) \end{bmatrix}$$

gegeben. Nach einer Vorrechnung sind weiterhin die Eigenwerte sowie die zugehörigen Eigenvektoren des *konservativen* Teilsystems bekannt:

$$\omega_1^2 = \frac{c}{m} \quad , \quad \omega_2^2 = 3\frac{c}{m} \quad , \quad \vec{u}_1 = a \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{u}_2 = b \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Gegeben: c, d, m, $\hat{F}$, Ω.

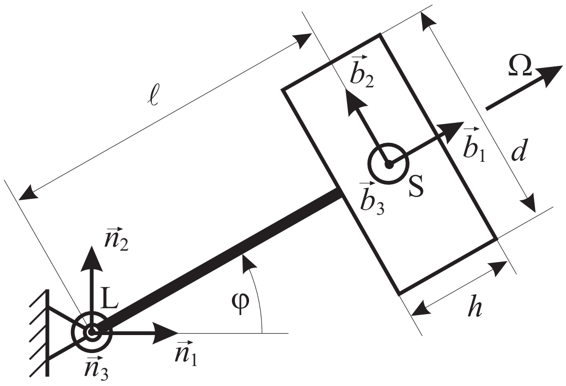
a) Geben Sie die bezüglich der Massenmatrix normierten Eigenvektoren an! 3

b) Stellen Sie die Dämpfungsmatrix $\underset{\sim}{D}$ als Linearkombination der Massenmatrix $\underset{\sim}{M}$ und Steifigkeitsmatrix $\underset{\sim}{C}$ dar! 1

c) Geben Sie die modal entkoppelten Bewegungsgleichungen an! 3

d) Mit welcher Transformationsvorschrift gelingt die Rücktransformation vom modalen in den physikalischen Raum? 1

5. Aufgabe: Kreisel und Drall [7]



Der skizzierte scheibenförmige, homogene Rotor (Masse m, Höhe h, Durchmesser d) dreht mit konstanten Winkelgeschwindigkeit Ω auf einer masselosen Stange. Das System führt zudem eine Schwenkbewegung mit $\varphi(t)$ durch. Zwischen dem Bezugssystem Ⓑ und dem Inertialsystem Ⓝ gelten folgende Zusammenhänge:

φ ist der Winkel zwischen $\vec{b}_1$ und $\vec{n}_1$. $\vec{b}_3$ und $\vec{n}_3$ sind parallel.

Gegeben: l, d, h, m, $\Omega = \text{const.}$, $\varphi(t)$.

a) Bestimmen Sie die äquatorialen und polaren Massenträgheitsmomente $J_a^{(S)}$ und $J_p^{(S)}$ des Rotors bezüglich des Schwerpunktes S! [2]

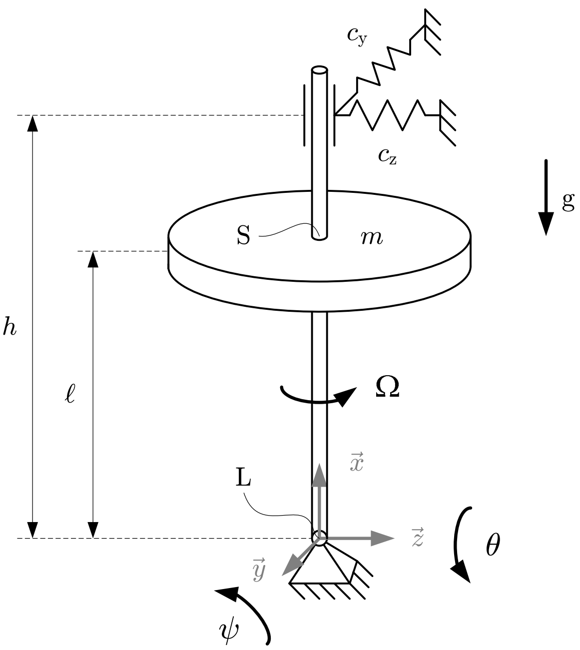
b) Bestimmen Sie den Trägheitstensor $\underset{\sim}{\Theta}^{(S)}$ des Rotors bezüglich des Schwerpunktes S, und beziehen Sie sich dabei auf die Einheitsvektoren des Bezugssystems Ⓑ! [1]

c) Geben Sie für den Drall $\vec{H}_L$ um das Lager L die Maßzahlen bezüglich der Einheitsvektoren des Bezugssystems Ⓑ an! [3]

d) Geben Sie für den Drall $\vec{H}_L$ um das Lager L die Maßzahlen bezüglich der Einheitsvektoren des Inertialsystems Ⓝ an! [1]

6. Aufgabe: Rotordynamik

11



Der skizzierte Rotor, bestehend aus einer masselosen Welle und einem homogenen Kreiszylinder (Masse m, äquatoriales und polares Massenträgheitsmoment $J_a^{(L)}$ bzw. $J_p^{(L)}$), dreht mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω. Der Rotor ist in y- und z-Richtung federnd gelagert und führt Schwingungen um die y- und die z-Achse aus. Für kleine Winkel ψ und θ lauten die Bewegungsgleichungen des Systems

$$J_a^{(L)}\ddot{\psi} + \left(ch^2 - mgl\right)\psi + J_p^{(L)}\Omega\dot{\theta} = 0$$

und

$$J_a^{(L)}\ddot{\theta} + \left(ch^2 - mgl\right)\theta - J_p^{(L)}\Omega\dot{\psi} = 0.$$

Gegeben: $J_a^{(L)}$, $J_p^{(L)}$, m, $c_y = c_z = c$, Ω, l, h, g.

a) Geben Sie die Bewegungsdifferenzialgleichungen in Matrizenschreibweise an! Verwenden Sie dabei den Vektor der verallgemeinerten Koordinaten $\vec{q}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix}\psi & \theta\end{bmatrix}$. Wie lauten die Massenmatrix $\underset{\sim}{M}$, die Dämpfungsmatrix $\underset{\sim}{D}$, die Matrix der gyroskopischen Kräfte $\underset{\sim}{G}$, die Steifigkeitsmatix $\underset{\sim}{C}$ und die Matrix der zirkulatorischen Kräfte $\underset{\sim}{N}$ für das gegebene Systeme? 3

b) Stellen Sie unter Nutzung des komplexen Winkels $\underline{\rho} = \psi + \mathrm{j}\theta$ die komplexe Bewegungsdifferenzialgleichung auf! 2

c) Verwenden Sie den Lösungsansatz $\underline{\rho}(t) = \underline{\hat{\rho}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$, und bestimmen Sie die charakteristische Gleichung! 1

d) Berechnen Sie die Eigenkreisfrequenzen $\omega_i = f(\Omega)$! Geben Sie die Eckwerte für $\Omega = 0$ und $\Omega \rightarrow \infty$ an! 3

e) Skizzieren Sie den Verlauf der Eigenkreisfrequenzen als Funktion der Winkelgeschwindigkeit Ω! Kennzeichnen Sie Asymptoten sowie Gegen- und Gleichlauf! 2

MD F 2009

A.1

a) $^{B}\vec{\omega}^{C} = -\dot{q}_3 \cdot \vec{c}_3 = -\dot{q}_3 \sin(q_1) \cdot \vec{n}_1 - \dot{q}_3 \cos(q_1) \cdot \vec{n}_3$

$^{A}\vec{\omega}^{B} = \dot{q}_2 \cdot \vec{b}_3 = \dot{q}_2 \cdot \sin(q_1) \cdot \vec{n}_1 + \dot{q}_2 \cdot \cos(q_1) \cdot \vec{n}_3$

$^{N}\vec{\omega}^{A} = \dot{q}_1 \cdot \vec{a}_2 = \dot{q}_1 \cdot \vec{n}_2$

$\vec{a}_3 = \vec{b}_3 = \vec{c}_3 = \cos(q_1) \cdot \vec{n}_3 + \sin(q_1) \cdot \vec{n}_1$

b) $^{N}\vec{\omega}^{C} = {}^{N}\vec{\omega}^{A} + {}^{A}\vec{\omega}^{B} + {}^{B}\vec{\omega}^{C}$

$= (\dot{q}_2 - \dot{q}_3) \sin(q_1) \cdot \vec{n}_1 + \dot{q}_1 \cdot \vec{n}_2 + (\dot{q}_2 - \dot{q}_3) \cos(q_1) \cdot \vec{n}_3$

c) $\vec{QR} = k \cdot \vec{c}_1$

$\vec{PR} = l \cdot \vec{b}_1 + k \cdot \vec{c}_1 = l \cdot \vec{b}_1 + k \cos q_3 \cdot \vec{b}_1 - k \sin q_3 \cdot \vec{b}_2$

$\vec{OR} = h \cdot \vec{a}_2 + l \cdot \vec{b}_1 + k \cdot \vec{c}_1$

$= \left[l \cdot \cos(q_2) + k \cos(q_3) \cdot \cos(q_2) + k \sin(q_3) \cdot \sin(q_2) \right] \cdot \vec{a}_1$

$+ \left[h + l \cdot \sin q_2 + k \cos(q_3) \cdot \sin(q_2) - k \cdot \sin(q_3) \cdot \cos(q_2) \right] \cdot \vec{a}_2$

d) $^{N}\vec{V}^{R} = {}^{A}\vec{V}^{R} + {}^{N}\vec{\omega}^{A} \times \vec{OR}$

MD F 2009

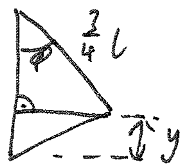
A.2.

a) $$Q^{n.k} = \frac{dW}{d\varphi} \qquad W = F \cdot x = -F(t) \cdot \frac{l}{4}\sin\varphi$$

$$\Rightarrow Q^{n.k} = -\frac{F \cdot l}{4}\cos\varphi$$

b) $$J_1^{(L)} = J_1^{(c)} + m_1 \cdot (\Delta x)^2$$
$$= \frac{1}{12} m_1 l^2 + m_1 \left(\frac{l}{4}\right)^2 = \frac{7}{48} m_1 l^2$$

c) $$T = \frac{1}{2} m_2 \dot{y}^2 + \frac{1}{2} J_1^{(L)} \dot{\varphi}^2$$



$$y = \frac{3}{4} l (1-\cos\varphi) \Rightarrow \dot{y} = \dot{\varphi}\frac{3}{4} l \sin\varphi$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{\varphi}\frac{3}{4} l \sin\varphi\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} m_1 l^2 + m_1 \left(\frac{l}{4}\right)^2\right)\dot{\varphi}^2$$
$$= \frac{1}{2}\frac{9}{16} m_2 \dot{\varphi}^2 l^2 \sin^2\varphi + \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{48} m_1 l^2 \dot{\varphi}^2$$
$$= \frac{9}{32} m_2 \dot{\varphi}^2 l^2 \sin^2\varphi + \frac{7}{96} m_1 l^2 \dot{\varphi}^2$$

$$U = U_{m_1} + U_{m_2} + U_c$$
$$= m_1 g \frac{l}{4}(1-\cos\varphi) + m_2 g \frac{3}{4} l (1-\cos\varphi) + \frac{1}{2} c \left[\frac{3}{4} l (1-\cos\varphi)\right]^2$$
$$= m_1 g \frac{l}{4}(1-\cos\varphi) + m_2 g \frac{3}{4} l (1-\cos\varphi) + \frac{9}{32} c l^2 (1-\cos\varphi)^2$$

MD F 2009

A. 2

d).

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = \left(\frac{m_1}{4} + \frac{3}{4} m_2\right) l g \sin\varphi + \frac{9}{32} c l^2 \cdot 2 (1-\cos\varphi) \frac{\partial (1-\cos\varphi)}{\partial \varphi}$$

$$= \left(\frac{m_1}{4} + \frac{3}{4} m_2\right) l g \sin\varphi + \frac{9}{16} c l^2 (1-\cos\varphi) \sin\varphi$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{9}{32} m_2 \dot{\varphi}^2 l^2 \, 2 \sin\varphi \cos\varphi$$

$$= \frac{9}{16} m_2 \dot{\varphi}^2 l^2 \sin\varphi \cos\varphi$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = 2 \left(\frac{9}{32} m_2 \cancel{\varphi} l^2 \sin^2\varphi + \frac{7}{96} m_1 l^2 \right) \dot{\varphi}$$

$$= \frac{9}{16} m_2 \dot{\varphi} l^2 \sin^2\varphi + \frac{7}{48} m_1 l^2 \dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{9}{16} m_2 \ddot{\varphi} l^2 \sin^2\varphi + \frac{9}{16} m_2 \dot{\varphi} l^2 (2 \sin\varphi \cos\varphi) \cdot \dot{\varphi} + \frac{7}{48} m_1 l^2 \ddot{\varphi}$$

$$= \left(\frac{9}{16} m_2 l^2 \sin^2\varphi + \frac{7}{48} m_1 l^2\right) \ddot{\varphi} + \frac{9}{8} m_2 l^2 \dot{\varphi}^2 \sin\varphi \cos\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \frac{\partial U}{\partial \varphi} = Q^{n.c}$$

MD F2009

A.3

a) Impulssatz: $2m\ddot{x}_1 + 2cx_1 + cx_1 - cx_2 = 0$

$$m\ddot{x}_2 + cx_2 - cx_1 = 0$$

$$\underbrace{m\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{M}}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{c\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{C}} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) $0 \overset{!}{=} |\underset{\sim}{C} - \omega^2 \cdot \underset{\sim}{M}|$

$$= \begin{vmatrix} 3c - 2\omega^2 m & -c \\ -c & c - \omega^2 m \end{vmatrix}$$

$$= (3c - 2\omega^2 m)(c - \omega^2 m) - c^2$$

$$= 2\omega^4 m^2 - 5cm\omega^2 + 2c^2$$

$$\Rightarrow \quad \omega^4 - \frac{5c}{2m}\cdot\omega^2 + \frac{c^2}{m^2} = 0$$

$$\omega_1^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{c}{m} \qquad \omega_2^2 = 2\cdot\frac{c}{m}$$

c) $\vec{0} = [\underset{\sim}{C} - \omega_1^2 \cdot \underset{\sim}{M}] \cdot \vec{u}_1$

$$= \begin{bmatrix} 3c - c & -c \\ -c & c - \frac{1}{2}c \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{u}_{11} \\ \hat{u}_{21} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{u}_{21} = 2 \cdot \hat{u}_{11}$$

$$\vec{u}_1 = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

MD 2009

A. 3

c) Fortsetzung

$$\vec{0} = [\underset{\sim}{C} - c\omega_2^2 \cdot \underset{\sim}{M}] \cdot \vec{u}_2$$

$$= \begin{bmatrix} 3c-4c & -c \\ -c & c-2c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{u}_{12} \\ \hat{u}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{u}_2 = \beta \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d) $\underset{\sim}{D} = \begin{bmatrix} d & -d \\ -d & d \end{bmatrix}$

e) Es muss Proportionaldämpfung vorliegen, also

$\underset{\sim}{D} = a \cdot \underset{\sim}{M} + b \cdot \underset{\sim}{C}$ gelten.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \overset{!}{=} a \cdot \frac{m}{d} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \cdot \frac{c}{d} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Diese Gleichung kann für skalare a, b nie erfüllt werden. Die Entkopplung ist nicht möglich!

MD F2009

A.4

a) $1 \overset{!}{=} \vec{u}_1^T \cdot \underset{\sim}{M} \cdot \vec{u}_1$

$= a^2 \cdot m \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$= 2a^2 m$

$\Rightarrow a = \sqrt{\frac{1}{2m}} \quad \Rightarrow \vec{u}_1 = \sqrt{\frac{1}{2m}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$1 \overset{!}{=} \vec{u}_2^T \cdot \underset{\sim}{M} \cdot \vec{u}_2$

$\Rightarrow b = \sqrt{\frac{1}{2m}} \quad \Rightarrow \vec{u}_2 = \sqrt{\frac{1}{2m}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = \alpha \cdot \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} 2c & -c \\ -c & 2c \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \alpha = \frac{d}{m} \quad \beta = 0$

$\underset{\sim}{D} = \frac{d}{m} \cdot \underset{\sim}{M}$

c) $\underset{\sim}{U} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \underset{\sim}{U}^T \cdot \vec{F} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{F} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \cdot \begin{bmatrix} \hat{F} \\ -\hat{F} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \frac{d}{m} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \frac{c}{m} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} \hat{F} \\ -\hat{F} \end{pmatrix}$$

d) $\vec{x} = \underset{\sim}{U} \cdot \vec{q} \quad$ mit $\quad \underset{\sim}{U} = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 \end{bmatrix}$

MD F2009

A.5

a) $J_a^{(S)} = \frac{m}{4}\left(\frac{d^2}{4} + \frac{h^2}{3}\right)$

$J_p^{(S)} = \frac{1}{2} m \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{1}{8} m d^2$

b) $\underset{\sim}{\Theta}^{(S)} = \begin{bmatrix} J_p^{(S)} & 0 & 0 \\ 0 & J_a^{(S)} & 0 \\ 0 & 0 & J_a^{(S)} \end{bmatrix}$

c) $\vec{H}_L = \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ m l \dot{\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} + \underset{\sim}{\Theta}^{(S)} \begin{pmatrix} \Omega \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m l^2 \dot{\varphi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_p^{(S)} \cdot \Omega \\ 0 \\ J_a^{(S)} \cdot \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_p^{(L)} \cdot \Omega \\ 0 \\ J_a^{(L)} \cdot \dot{\varphi} \end{pmatrix}$

d) $\vec{H}_L = \begin{pmatrix} J_p^{(L)} \cdot \Omega \cdot \cos\varphi \\ J_p^{(L)} \cdot \Omega \cdot \sin\varphi \\ J_a^{(L)} \cdot \dot{\varphi} \end{pmatrix}$

MD F2009

A.6

a) $$\underbrace{\begin{pmatrix} \Theta_a^{(L)} & 0 \\ 0 & \Theta_a^{(L)} \end{pmatrix}}_{\underset{\sim}{M}} \begin{pmatrix} \ddot{\psi} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \Theta_p^{(L)} \cdot \Omega \\ -\Theta_p^{(L)} \cdot \Omega & 0 \end{pmatrix}}_{\underset{\sim}{G}} \begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} ch^2 - mgl & 0 \\ 0 & ch^2 - mgl \end{pmatrix}}_{\underset{\sim}{C}} \begin{pmatrix} \psi \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{N} = \underset{\sim}{0}$$

b) $(\mathrm{I}) + j \cdot (\mathrm{II})$

$$\Theta_a^{(L)} (\ddot{\psi} + j \cdot \ddot{\theta}) + \Theta_p^{(L)} \cdot \Omega \cdot \underbrace{(\dot{\theta} - j \cdot \dot{\psi}) \cdot j}_{(\dot{\psi} + j \cdot \dot{\theta})} \cdot \frac{1}{j} + (ch^2 - mgl)(\psi + j \cdot \theta) = 0$$

$$\Theta_a^{(L)} \ddot{\underline{\rho}} - j \cdot \Theta_p^{(L)} \Omega \cdot \dot{\underline{\rho}} + (ch^2 - mgl) \cdot \underline{\rho} = 0$$

c) $$-\omega^2 \cdot \Theta_a^{(L)} + \omega \cdot \Theta_p^{(L)} \cdot \Omega + ch^2 - mgl = 0$$

d) $$\omega_{1,2} = \frac{\Theta_p^{(L)} \cdot \Omega \pm \sqrt{\Omega^2 \cdot \Theta_p^{(L)2} + 4 \Theta_a^{(L)} (ch^2 - mgl)}}{2 \Theta_a^{(L)}}$$

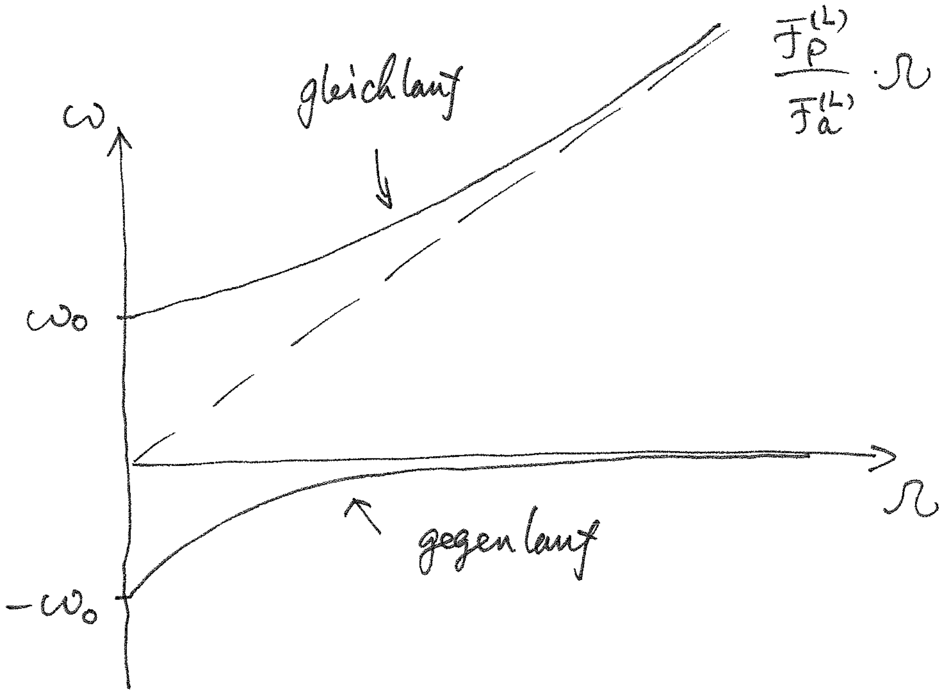
$$\omega_{1,2} \overset{\Omega \to 0}{=} \pm \sqrt{\frac{ch^2 - mgl}{\Theta_a^{(L)}}} = \pm \omega_0$$

$$\omega_{1,2} \overset{\Omega \to \infty}{=} \frac{\Theta_p^{(L)} \cdot \Omega \pm \Theta_p^{(L)} \cdot \Omega}{2 \cdot \Theta_a^{(L)}} = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{\Theta_p^{(L)}}{\Theta_a^{(L)}} \cdot \Omega \end{cases}$$

MD F 2009

A.6

e)



gleichlauf
$\frac{J_p^{(L)}}{J_a^{(L)}} \cdot \Omega$
ω
ω_0
$-\omega_0$
Ω
gegenlauf