Institut für Dynamik und Schwingungen
Leibniz Universität Hannover

Repetitorium

Technische Mechanik III

Version 3.1, 09.02.2010

Dr.-Ing. L. Panning

Institut für Dynamik und Schwingungen

Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover

Dieses Repetitorium soll helfen,

- klassische Aufgabentypen aus der Technischen Mechanik zu beherrschen,
- häufig auftretende Fehler zu vermeiden und
- anhand durchgerechneter Beispiele verschiedene Lösungswege beurteilen zu können.

Dieses Repetitorium soll nicht

- als Probeklausur interpretiert werden,
- den Anspruch auf eine vollständige Abdeckung des Lehrstoffes erheben und
- als Hinweis auf den Klausurinhalt verstanden werden!

Ziel ist es, eine Sammlung charakteristischer Fragestellungen mit entsprechenden Lösungswegen bereitzustellen. Einige ausgewählte Aufgaben werden dann beispielhaft während des Repetitoriums durchgerechnet und diskutiert.

Dank an die wissenschaftlichen MitarbeiterInnen des IKM und IDS für die tatkräftige Unterstützung!

Bei Anregungen oder Korrekturen bitte kurze E-Mail an lehre@ids.uni-hannover.de.

Dr.-Ing. Lars Panning

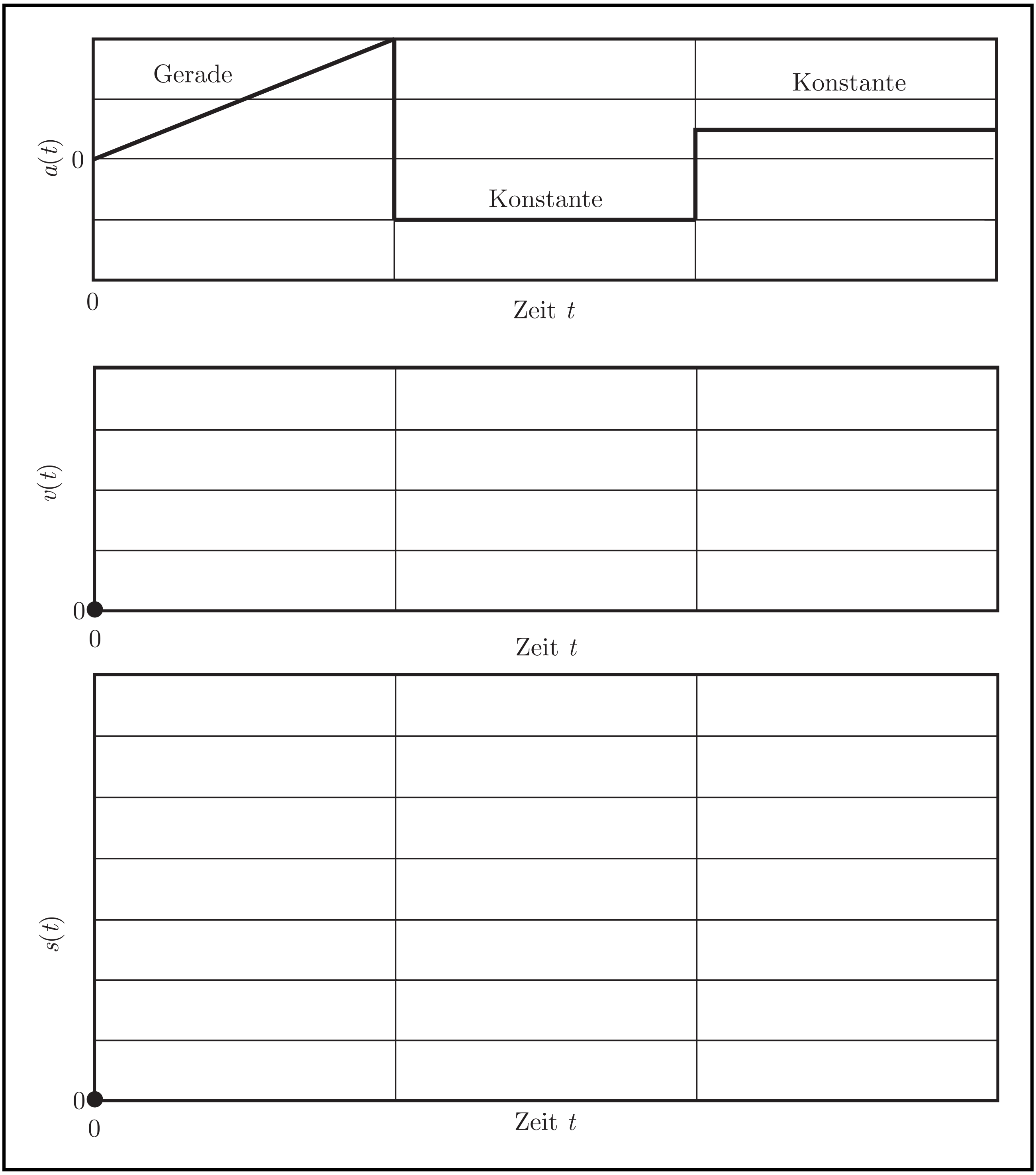
Musterlösungen (ohne Gewähr)

Frage 1

Ein Fahrzeug fährt zum Zeitpunkt $t = 0$ aus der Ruhe heraus an, $s(t = 0) = 0$, $v(t = 0) = 0$.

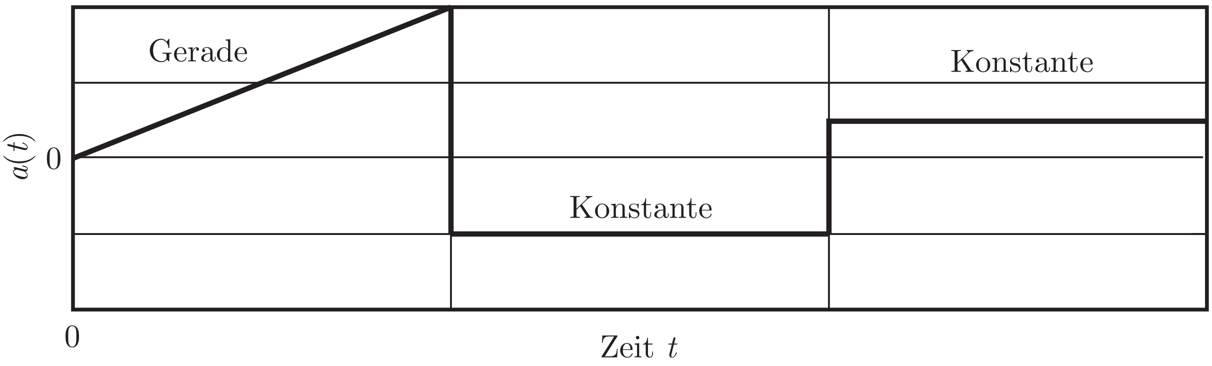
Vervollständigen Sie die kinematischen Diagramme qualitativ und geben Sie an, um welchen Funktionstyp es sich handelt (Konstante, Gerade usw.)!

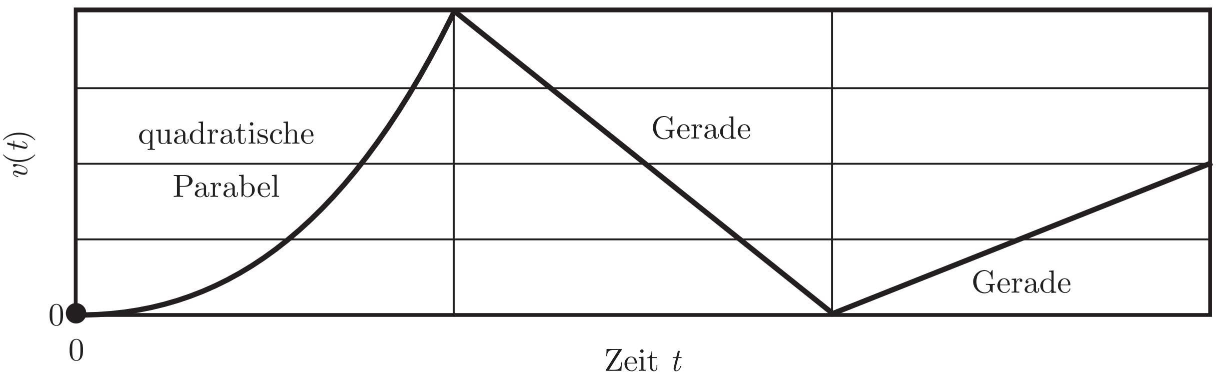
Gegeben: Beschleunigung $a(t)$.

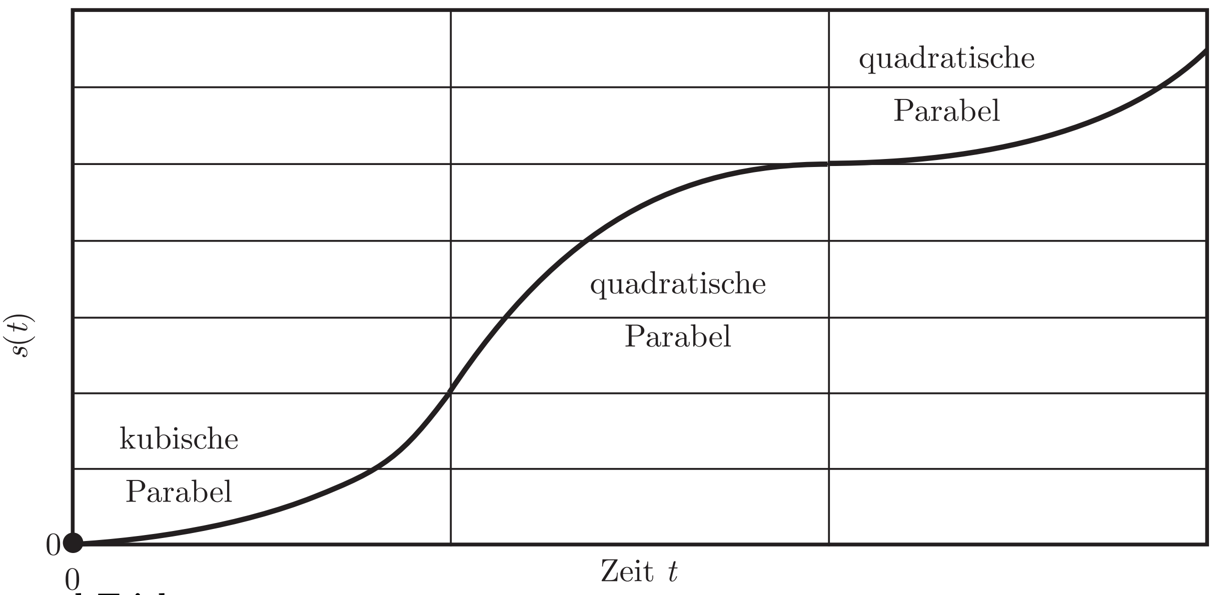


Musterlösungen (ohne Gewähr)

Lösung







Tipps und Tricks

- Lösung am schnellsten durch 'grafisches' Integrieren, Rechnung meist nicht notwendig!
- Zusammenhänge $v(t) = \dot{s}(t)$ und $a(t) = \dot{v}(t)$ überprüfen!
- Eckwerte und Kurventyp angeben, wenn gefragt - sauber zeichnen, sodass qualitative Verläufe gut erkennbar sind!

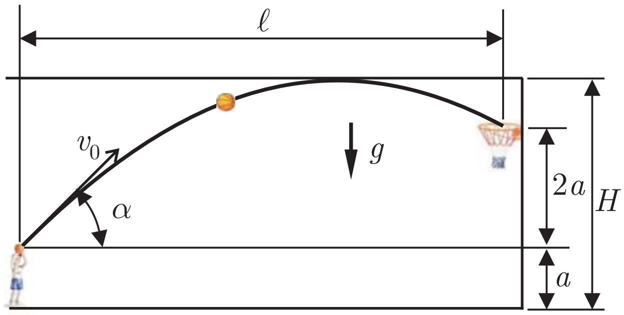
Musterlösungen (ohne Gewähr)

Frage 2

Ein Basketball wird unter einem Winkel von $\alpha = 45°$ über eine Länge ℓ in einen Korb in der Höhe $2a$ über der Abwurfhöhe a geworfen.

a) Wie muss die Abwurfgeschwindigkeit v_0 gewählt werden, damit der Ball in den Korb fällt?

b) Wie groß muss in diesem Fall die Höhe H der Halle mindestens sein, sodass der Ball die Decke gerade nicht berührt?



Gegeben: $\alpha = 45°$, ℓ, $a = \ell/8$, g.

$v_0 =$	$H \geq$

Lösung

Wurfbewegung:
$z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\alpha + a$ (Vertikalbewegung); $x = v_0 t \cos\alpha$ (Horizontalbewegung)

a) Elimination der Zeit (mit $a = \ell/8$, $\sin\alpha = \cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$):

$$\ell \overset{!}{=} \frac{1}{2}\sqrt{2}v_0 t^* \rightarrow t^* = \sqrt{2}\frac{\ell}{v_0}$$

$$3a \overset{!}{=} -\frac{1}{2}gt^{*2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}v_0 t^* + a = -g\frac{\ell^2}{v_0^2} + \cancel{v_0}\frac{\ell}{\cancel{v_0}} + a \rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{4}{3}g\ell}$$

b) maximale Höhe bei $\dot{z} = 0 = v_0 \sin\alpha - gt^{**} \rightarrow t^{**} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\frac{v_0}{g}$

$$z_{\max} = z(t^{**}) = -\frac{1}{2}gt^{**2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}v_0 t^{**} + a = -\frac{1}{4}\frac{v_0^2}{g} + \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} + a = \frac{1}{4}\frac{v_0^2}{g} + a = \frac{11}{24}\ell \rightarrow H \geq \frac{11}{24}\ell$$

Tipps und Tricks

Aufgabentypen dieser Art führen häufig auf die recht einfachen Gleichungen zum schiefen Wurf, die entsprechend umgestellt werden müssen bzw. aus denen die Zeit eliminiert werden muss!

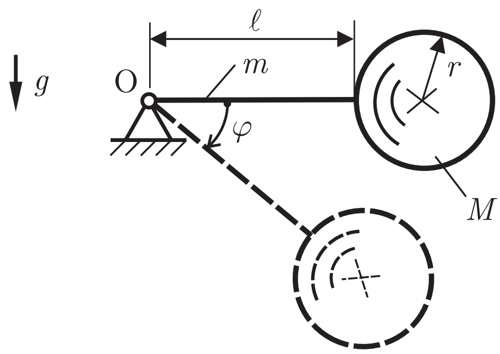
Musterlösungen (ohne Gewähr)

Frage 3

Eine Kugel (Radius r, Masse M) hängt in horizontaler Lage an einem Stab (Länge ℓ, Masse m). Das System wird aus der Ruhelage stoßfrei losgelassen.

a) Geben Sie das Massenträgheitsmoment $J_{\text{ges}}^{(\text{O})}$ des Systems bezüglich des Punktes O an!

b) Wie groß ist die maximal auftretende Winkelgeschwindigkeit $\omega_{\max} = \dot{\varphi}_{\max}$?



Gegeben: r, $\ell = 3r$, m, $M = \dfrac{5}{2}m$, g.

$J_{\text{ges}}^{(\text{O})} =$

$\omega_{\max} =$

Lösung

$$
\begin{aligned}
\text{a)}\quad J_{\text{ges}}^{(\text{O})} &= \underbrace{\frac{1}{3}m\ell^2}_{\text{Stab}} + \underbrace{\left(\frac{2}{5}Mr^2 + \underbrace{M(\ell+r)^2}_{\text{Steiner-Anteil}}\right)}_{\text{Kugel}} \\
&= 3mr^2 + (1+40)mr^2 \\
&= 44mr^2
\end{aligned}
$$

b) System ist konservativ $\rightarrow$ Energieerhaltungssatz:

$T_1 + U_1 = T_2 + U_2$

$T_1 = 0$, $U_1 = 0$ (System zu Beginn in Ruhe, Nullniveau im Lagerpunkt), $T_2 = \dfrac{1}{2}J_{\text{ges}}^{(\text{O})}\dot{\varphi}^2$

$$\rightarrow T_2 = -U_2 = -\left[-\left(mg\frac{\ell}{2} + Mg(\ell+r)\right)\sin\varphi\right]$$

$$\rightarrow T_{\max} = mg\frac{\ell}{2} + Mg(\ell+r) = \left(\frac{3}{2}+10\right)mgr = \frac{23}{2}mgr, \text{ denn } U_{\min} \text{ bei } \sin\varphi = 1 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\rightarrow \omega_{\max} = \sqrt{\frac{2T_{\max}}{J_{\text{ges}}^{(\text{O})}}} = \sqrt{\frac{23}{44}\frac{g}{r}}$$

Musterlösungen (ohne Gewähr)

Tipps und Tricks

- Wenn nicht $r \ll \ell$ gegeben ist bzw. die Masse nicht als Punktmasse bezeichnet wird, dann ist r im Steiner-Anteil für das Massenträgheitsmoment der Kugel zu berücksichtigen!
- Das Massenträgheitsmoment einer Kugel ist nicht identisch mit dem eines Zylinders (Aufgabenstellung genau lesen)!
- Energieerhaltungssatz: kinetische Energie maximal, wenn potentielle Energie minimal $\rightarrow \omega_{\max}$ wird hier im 'tiefsten Punkt' erreicht!
- Schwerepotential $U = mgz$ 'nach oben' positiv zählen (Koordinate z entgegen der Richtung der Erdbeschleunigung g)!
- Auf den angegebenen Winkel achten! Hier zählt φ gegenüber der Horizontalen, daher taucht im Schwerepotential $\sin\varphi$ auf.

Musterlösungen (ohne Gewähr)

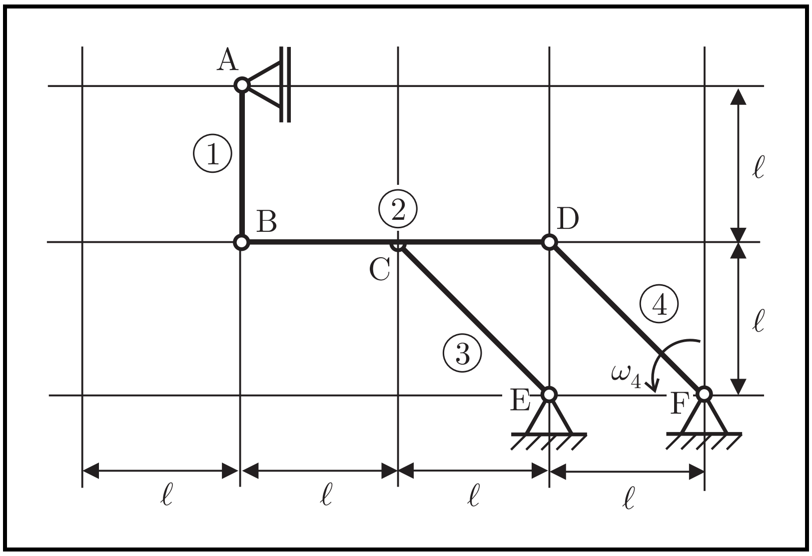
Frage 4

Gegeben ist der skizzierte Mechanismus aus vier Stäben. Stab (4) wird mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω_4 angetrieben.

a) Skizzieren Sie die Lage der Momentanpole aller Stäbe!

b) Wie groß ist der Betrag $|\vec{v}_\mathrm{A}|$ der Geschwindigkeit des Punktes A?

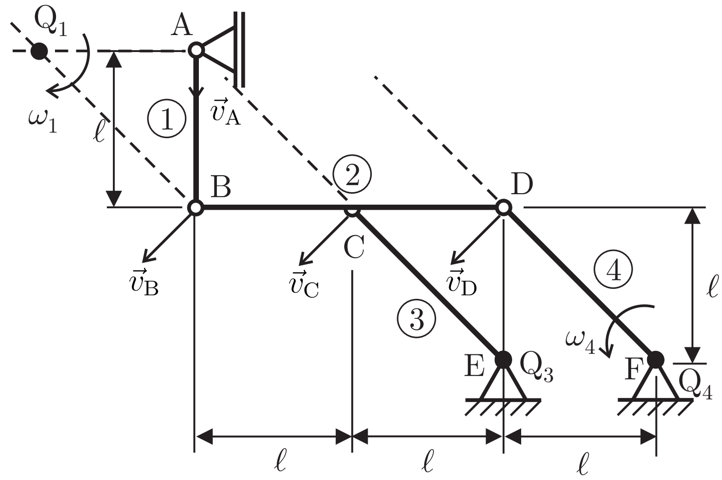
Gegeben: ℓ, ω_4.



$|\vec{v}_\mathrm{A}| =$

Musterlösungen (ohne Gewähr)

Lösung



a) Festlager sind Momentanpole für 3 und 4. Richtungen von $\vec{v}_C$ und $\vec{v}_D$ liegen damit fest → Richtungen parallel, Momentanpol für 2 nicht konstruierbar → Q_2 liegt im Unendlichen → reine Translation von 2 → alle Geschwindigkeiten nach Betrag und Richtung identisch → $|\vec{v}_B| = |\vec{v}_D| = \omega_4\sqrt{2}\ell$. Konstruktion von Q_1 aus Senkrechten zu $\vec{v}_B$ und $\vec{v}_A$.

b) $\omega_1 = \dfrac{|\vec{v}_B|}{\sqrt{2}\ell} = \dfrac{|\vec{v}_A|}{\ell} \rightarrow |\vec{v}_A| = \omega_4\ell$
(konsistent mit Richtung in der Skizze: 1 und 4 drehen in entgegengesetzter Richtung!)

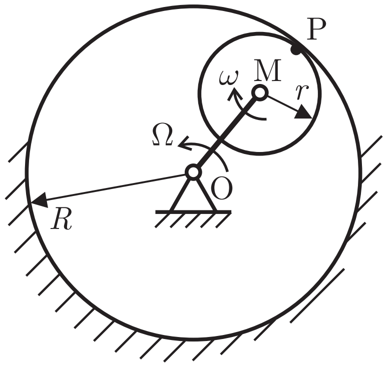
Tipps und Tricks

- Festlager sind Fixpunkte und damit Momentanpol des im Lager befestigten Bauteils!
- An Loslagern treten nur Geschwindigkeiten in der Richtung senkrecht zur Zwangsbedingung auf → Momentanpol auf Senkrechter zur möglichen Bewegungsrichtung im Loslager!
- In Gelenken besitzen die dort miteinander verbundenen Bauteile gleiche Geschwindigkeiten! Vorsicht bei Schiebehülsen o.ä., die eine Relativbewegung in einer Richtung zulassen. Hier gelten identische Geschwindigkeiten dann nur für die Richtung, in der beide Bauteile nicht relativ zueinander beweglich sind!

Musterlösungen (ohne Gewähr)

Frage 5

Ein Stab rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω um den Punkt O. Er trägt an seinem Ende eine Kreisscheibe (Radius r, Mittelpunkt M), die schlupffrei in ihrem Berührpunkt P in einem Hohlzylinder (Radius R) abrollt.



Kreuzen Sie an, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind!

Gegeben: r, R, $R > r$, Ω.

	richtig	falsch
a) Der Punkt P ist der Momentanpol der Kreisscheibe.	☐	☐
b) Der Betrag der Geschwindigkeit von M ist $\lvert\vec{v}_{\mathrm{M}}\rvert = \Omega(R-r)$.	☐	☐
c) Der Mittelpunkt M erfährt keine Beschleunigung.	☐	☐
d) Der Betrag der Winkelgeschwindigkeit der Kreisscheibe ist $\lvert\vec{\omega}\rvert = \dfrac{R-r}{r}\Omega$.	☐	☐
e) Der Punkt P erfährt keine Beschleunigung.	☐	☐

Musterlösungen (ohne Gewähr)

Lösung

a) Richtig, denn: kein Schlupf (Rutschen) im Punkt P → keine Relativgeschwindigkeit (Rollbedingung erfüllt). Da der Hohlzylinder fix im Raum ist und damit alle Punkte die Geschwindigkeit Null besitzen, muss auch P momentan in Ruhe sein (Momentanpol).

b) Richtig, denn M bewegt sich auf einer Kreisbahn mit dem Radius $R - r$.

c) Falsch, denn: M bewegt sich mit konstanter Bahngeschwindigkeit auf einer gekrümmten Bahn (hier: Kreisbahn). Es muss also eine Normalbeschleunigung wirken. $\vec{a}_{\mathrm{M}} = \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{\mathrm{OM}})$, $\vec{\Omega} = [0 \;\; 0 \;\; \Omega]^{\mathrm{T}}$, $\vec{r}_{\mathrm{OM}} = [(R-r) \;\; 0 \;\; 0]^{\mathrm{T}} \rightarrow \vec{a}_{\mathrm{M}} = \left[-(R-r)\Omega^2 \;\; 0 \;\; 0\right]^{\mathrm{T}} \rightarrow$ Betrag der Zentripetalbeschleunigung $|\vec{a}_{\mathrm{M}}| = (R-r)\Omega^2$.

d) Richtig, denn P ist Momentanpol, dann muss $|\vec{v}_{\mathrm{M}}| = \omega r = \Omega(R-r)$ sein, vgl. b).

e) Falsch, denn: P ist Momentanpol. Wäre auch die Beschleunigung Null, müsste P ein Fixpunkt sein, da sich seine Geschwindigkeit nicht ändern würde. Richtig ist: $\dot{\omega} = 0 \rightarrow \vec{a}_{\mathrm{P}} = \vec{a}_{\mathrm{M}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\mathrm{MP}})$. $\vec{a}_{\mathrm{M}} = \left[-(R-r)\Omega^2 \;\; 0 \;\; 0\right]^{\mathrm{T}}$, $\vec{\omega} = [0 \;\; 0 \;\; -\omega]^{\mathrm{T}}$, $\vec{r}_{\mathrm{MP}} = [r \;\; 0 \;\; 0]^{\mathrm{T}}$, $\rightarrow |\vec{a}_{\mathrm{P}}| = R\left(1 - \dfrac{R}{r}\right)\Omega^2$ (in Richtung des Stabes zum Lagerpunkt O).

Musterlösungen (ohne Gewähr)

Aufgabe 6

Der skizzierte Mechanismus besteht aus drei gelenkig miteinander verbundenen Stäben. Stab 1 wird durch die konstante Winkelgeschwindigkeit ω_1 angetrieben.

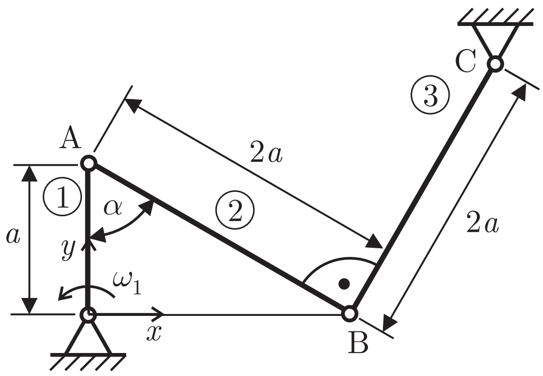
Bestimmen Sie für die gezeichnete Lage, in der Stab 2 und 3 senkrecht aufeinander stehen,

a) die Koordinaten des Momentanpols Q_2 des Stabes 2 im eingezeichneten x-y-Koordinatensystem,

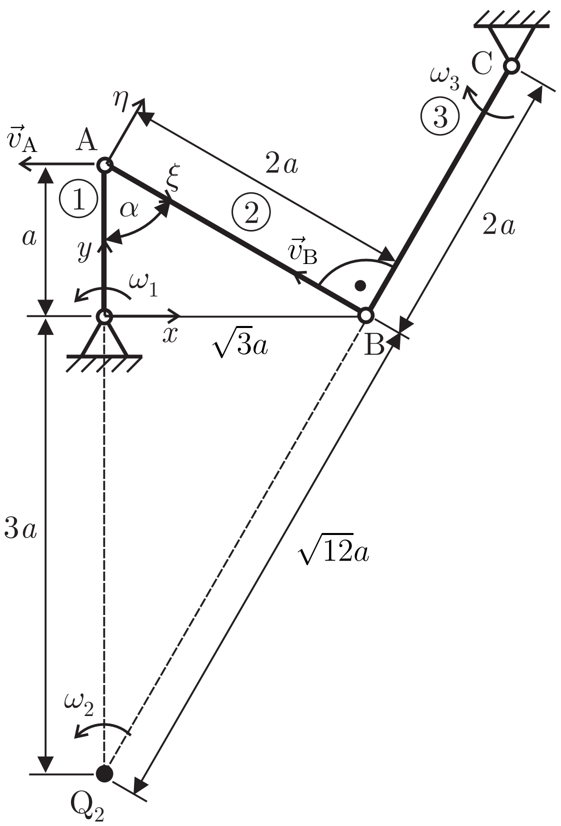
b) die Beträge der Winkelgeschwindigkeiten ω_2 und ω_3 sowie

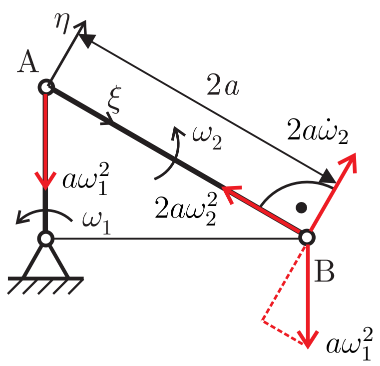
c) die Beträge der Winkelbeschleunigungen $\dot{\omega}_2$ und $\dot{\omega}_3$ der Stäbe 2 und 3!

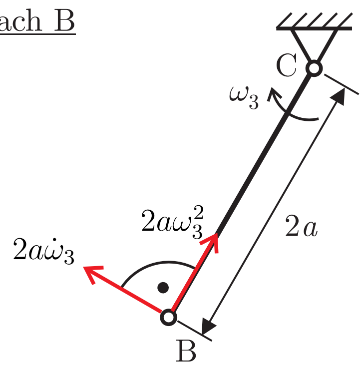
<u>Gegeben:</u> a, $\alpha = 60°$, ω_1.



Lösung







Musterlösungen (ohne Gewähr)

a) $x_{Q_2} = 0$; $y_{Q_2} = -3a$

b) $|\vec{v}_A| = a\omega_1 = 4a\omega_2 \rightarrow \omega_2 = \frac{1}{4}\omega_1$

$|\vec{v}_B| = \sqrt{12}a\omega_2 = 2a\omega_3 \rightarrow \omega_3 = \sqrt{3}\omega_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\omega_1$ (Drehrichtung entgegen ω_1 und ω_2!)

c) $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}}_2 \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{AB}) \overset{!}{=} \dot{\vec{\omega}}_3 \times \vec{r}_{CB} + \vec{\omega}_3 \times (\vec{\omega}_3 \times \vec{r}_{CB})$

Jetzt entscheidend, in welchem Koordinatensystem diese Größen angeschrieben werden. Hier wird das eingezeichnete ξ-η-System gewählt, da viele Größen in diesem Koordinatensystem besonders einfach sind:

$$\begin{aligned}
\vec{a}_B &= a\omega_1^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\omega}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_2 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\omega}_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -2a \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_3 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -2a \\ 0 \end{bmatrix} \right)
\end{aligned}$$

Nur ξ- und η-Komponente relevant (ebenes Problem!):

$a_{B,\xi} = \frac{a}{2}\omega_1^2 - 2a\omega_2^2 = -2a\dot{\omega}_3 \rightarrow \dot{\omega}_3 = -\frac{1}{4}\omega_1^2 + \omega_2^2 = -\frac{3}{16}\omega_1^2$

$a_{B,\eta} = -\frac{1}{2}\sqrt{3}a\omega_1^2 + 2a\dot{\omega}_2 = 2a\omega_3^2 \rightarrow \dot{\omega}_2 = \omega_3^2 + \frac{1}{4}\sqrt{3}\omega_1^2 = \frac{1}{16}(3 + 4\sqrt{3})\omega_1^2$

Tipps und Tricks

- Die Winkelbeschleunigungen lassen sich nicht über die einfachen Beziehungen aus den Abständen der Punkte A und B zu den Momentanpolen bestimmen! Momentanpole sind Geschwindigkeits- und *keine* Beschleunigungspole, d.h. die Beschleunigung eines Momentanpols ist im Allgemeinen *nicht* Null!

- Winkelbeschleunigungen lassen sich zumeist nicht so einfach erkennen wie die entsprechenden Winkelgeschwindigkeiten (allgemein: Überlagerung von Führungs-, Coriolis- und Relativbeschleunigung, hier: grafische Konstruktion noch recht gut möglich, da nur Führungsbeschleunigung vorhanden)!

- Bei vektorieller Schreibweise zur Berechnung des Kreuzproduktes ist auf die korrekte Wahl der Vorzeichen zu achten! Die Winkelgeschwindigkeiten werden definitionsgemäß in einem Rechtshandsystem positiv gezählt, hier also um eine aus der Zeichenebene herauszeigende ζ-Achse, die mit der ξ- und η-Achse in der Reihenfolge ξ, η, ζ ein Rechtshandsystem ergibt.

Musterlösungen (ohne Gewähr)

Insbesondere für Kreuzprodukte Koordinatensystem geschickt wählen! Alle Vektoren müssen konsistent in *einem* Koordinatensystem angegeben werden!

Zwei oder mehrere Körper, die in einem Gelenk miteinander verbunden sind, haben in diesem Punkt identische translatorische Geschwindigkeiten und Beschleunigungen!

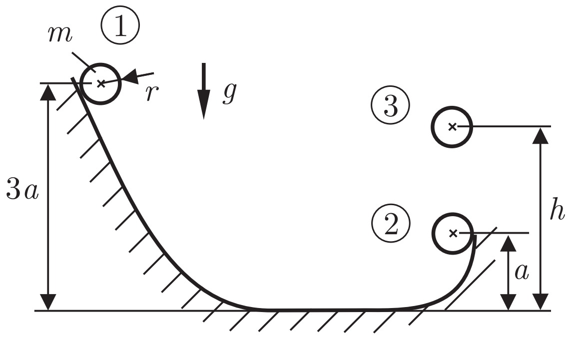
Musterlösungen (ohne Gewähr)

Aufgabe 7

Ein Zylinder (Radius r, Masse m) wird aus der Ruhelage 1 stoßfrei losgelassen und rollt ohne zu rutschen die skizzierte Bahn entlang, die bei 2 vertikal ausläuft und in der Höhe a endet.

Welche Höhe h erreicht der Zylinder in seinem Umkehrpunkt 3?

<u>Gegeben:</u> a, r, m, g.



Lösung

System ist konservativ → Energieerhaltungssatz:

$$T_2 + U_2 = T_1 + U_1$$

$$T_1 = 0,\ U_1 = 3mga,\ U_2 = mga,\ T_2 = \underbrace{\frac{1}{2}mv_2^2}_{T_{\text{trans}}} + \underbrace{\frac{1}{2}J^{(C)}\omega_2^2}_{T_{\text{rot}}} = \frac{1}{2}J^{(Q)}\omega_2^2 = \frac{3}{4}mr^2\omega_2^2$$

Rollbedingung $v_2 = r\omega_2$, Massenträgheitsmoment $J^{(C)} = \frac{1}{2}mr^2$

$$T_2 = \frac{1}{2}\left(mr^2\omega_2^2 + \frac{1}{2}mr^2\omega_2^2\right) = \frac{3}{4}mr^2\omega_2^2 = T_1 + U_1 - U_2 = 2mga \rightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{8ga}{3r^2}}$$

$$T_3 + U_3 = T_2 + U_2$$

Die Rotationsenergie T_{rot} bleibt in 3 erhalten (es wirken von 2 nach 3 keine Momente auf den Zylinder, die den Drall und damit die Drehgeschwindigkeit ändern ($\omega_3 = \omega_2$)!):

$$T_3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\omega_3^2 = \frac{2}{3}mga,\ T_2 = 2mga,\ U_2 = mga$$

$$U_3 = mgh = T_2 + U_2 - T_3 = 2mga + mga - \frac{2}{3}mga = \frac{7}{3}mga \rightarrow h = \frac{7}{3}a$$

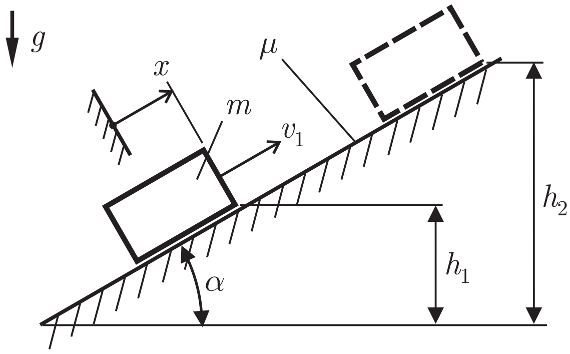
Tipps und Tricks

- Die ursprüngliche Höhe $3a$ kann nicht mehr erreicht werden, da die Masse auch in ihrem Umkehrpunkt aufgrund der anhaltenden Rotation (Rollbedingung am Ende der Bahn!) noch kinetische Energie besitzt! Die Höhe h muss daher entsprechend kleiner sein als $3a$.
- Die maximale Höhe $h = 3a$ würde erreicht, wenn die Rollbedingung bis zum Ende erfüllt wäre, d.h. der Zylinder die Bahn nicht verlässt, sondern auch im senkrechten Teil weiterhin Kontakt zur Bahn hat. Wird der senkrechte Teil der Bahn verkürzt, vermindert sich auch die maximal erreichbare Höhe h.
- Die Höhe h kann, ausgehend von der Position 2, auch mit den Gleichungen des senkrechten Wurfs ermittelt werden!

Musterlösungen (ohne Gewähr)

Aufgabe 8

Eine Punktmasse m gleitet unter dem Winkel α eine reibungsbehaftete (Gleitreibkoeffizient μ) schiefe Ebene hinauf. Die Punktmasse besitzt in der Höhe h_1 die Geschwindigkeit v_1.



Welche maximale Höhe h_2 erreicht die Masse?

Gegeben: α, h_1, v_1, m, μ, g.

Lösung

zurückgelegter Weg in x-Richtung: $s = \dfrac{h_2 - h_1}{\sin\alpha}$

Alternative I: Arbeitssatz

$T_2 + U_2 = T_1 + U_1 + W_{12}^{\text{n.k.}}$

$T_1 = \dfrac{1}{2}mv_1^2$, $U_1 = mgh_1$, $T_2 = 0$ (Umkehrpunkt!), $U_2 = mgh_2$

$W_{12}^{\text{n.k.}} = -F_{\text{R}}s = -\mu F_{\text{N}}s$ (Reibkraft der Bewegung entgegengerichtet $\rightarrow W_{12}^{\text{n.k.}}$ negativ!)

$F_{\text{N}} = mg\cos\alpha$ (aus Statik: kein Abheben von der schiefen Ebene!)

$W_{12}^{\text{n.k.}} = U_2 - U_1 - T_1 = mg(h_2 - h_1) - \dfrac{1}{2}mv_1^2 = -\mu mg\cos\alpha\dfrac{h_2 - h_1}{\sin\alpha}$

$\rightarrow (h_2 - h_1)\left(1 + \dfrac{\mu}{\tan\alpha}\right)\cancel{m}g = \dfrac{1}{2}\cancel{m}v_1^2 \rightarrow h_2 = h_1 + \dfrac{v_1^2}{2\left(1 + \frac{\mu}{\tan\alpha}\right)g}$

Alternative II: Impulssatz

Impulssatz x-Richtung: $m\ddot{x} = -mg\sin\alpha - F_{\text{R}} = -mg\sin\alpha - \mu F_{\text{N}}$

Impulssatz senkrecht zur Ebene (Statik, s.o.): $0 = -mg\cos\alpha + F_{\text{N}} \rightarrow F_{\text{N}} = mg\cos\alpha$

oben eingesetzt und integriert ($t = 0$: $x = 0$, $\dot{x} = v_1$):

$\rightarrow \ddot{x} = -\left(\sin\alpha + \mu\cos\alpha\right)g$

$\rightarrow \dot{x} = -\left(\sin\alpha + \mu\cos\alpha\right)gt + v_1$

$\rightarrow x = -\dfrac{1}{2}\left(\sin\alpha + \mu\cos\alpha\right)gt^2 + v_1t$

Umkehrpunkt:

$\dot{x}^* = v^* \overset{!}{=} 0 = -\left(\sin\alpha + \mu\cos\alpha\right)gt^* + v_1 \rightarrow t^* = \dfrac{v_1}{g\left(\sin\alpha + \mu\cos\alpha\right)}$

$x^* = s = -\dfrac{1}{2}\left(\sin\alpha + \mu\cos\alpha\right)gt^{*2} + v_1t^* = \dfrac{v_1^2}{2\left(\sin\alpha + \mu\cos\alpha\right)g}$

$h_2 = h_1 + s\sin\alpha = h_1 + \dfrac{v_1^2}{2\left(1 + \frac{\mu}{\tan\alpha}\right)g}$

Musterlösungen (ohne Gewähr)

Tipps und Tricks

- Kein konservatives System (Reibung!) → Arbeits- statt Energieerhaltungssatz!

- Bei der Betrachtung von zwei verschiedenen Zuständen ist der Arbeitssatz (bei konservativen Systemen: Energieerhaltungssatz) häufig die schnellere Variante!

- Die Wahl des Koordinatensystems ist beliebig. Hier bietet sich die eingezeichnete Richtung an. Auch die Horizontale und Vertikale können für x und y gewählt werden. Dann muss allerdings die Kopplung über den Winkel α berücksichtigt werden. Wichtig ist für die Gültigkeit von Impuls- und Drallsatz nur, dass es sich um ein (beliebig orientiertes) Inertialsystem handelt!

- Da m als Punktmasse angenommen wurde, sind ihre Abmessungen vernachlässigbar. Für die potentielle Energie aufgrund des Schwerepotentials ist grundsätzlich die Lage des Schwerpunktes entscheidend!

- Dissipative Kräfte (Reibung, Dämpferkräfte) *vermindern* die Gesamtenergie vom Zustand 1 zum Zustand 2 ($W_{12}^{\text{n.k.}} < 0$). Äußere Kräfte (Fremderregung) können die Gesamtenergie *erhöhen* ($W_{12}^{\text{n.k.}} > 0$) (Vorzeichenkontrolle)!

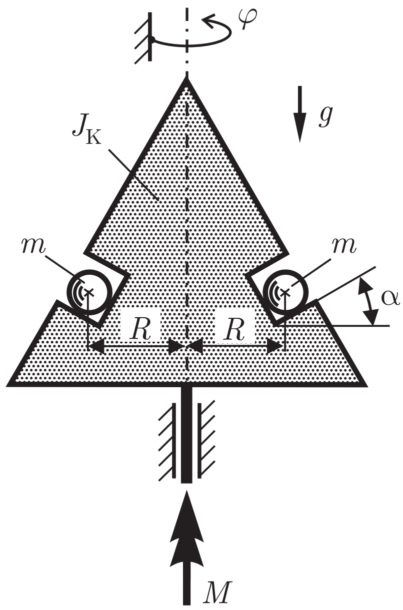
- Wenn Gleitrichtung bekannt, Reibkraft F_{R} gleich vorzeichenrichtig annehmen (Bewegungsrichtung entgegengesetzt)!

- Die Beziehung $F_{\mathrm{R}} = \mu F_{\mathrm{N}}$ gilt nur für den Gleitzustand (F_{R} ist dann eine eingeprägte Kraft). Für den Haftfall gilt dagegen $|F_{\mathrm{R}}| \leq \mu_0 F_{\mathrm{N}}$ (F_{R} ist dann eine Reaktionskraft) mit dem Haftreibkoeffizienten μ_0!

Musterlösungen (ohne Gewähr)

Aufgabe 9

Ein Kegel rotiert wie skizziert um die gezeichnete Drehachse (Massenträgheitsmoment J_{K}). Er trägt zusätzlich in zwei Nuten unter einem Winkel α im Abstand R von der Drehachse reibungsfrei zwei Punktmassen m. Ein Motor bringt an der Drehachse das Moment $M(t)$ auf. Das System ist zum Zeitpunkt $t = 0$ in Ruhe.



Nach welcher Zeit t^* beginnen die Punktmassen, sich von dem Kegel zu lösen?

Gegeben: R, $\alpha = 30°$, m, J_{K}, $M(t) = M_0(t/T)^2$, M_0, T, g.

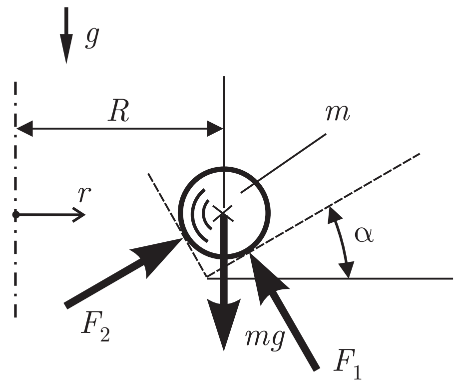
Lösung

Gesamtes Massenträgheitsmoment:
$J = J_{\mathrm{K}} + 2mR^2$ (gültig, bis die Punktmassen gerade beginnen, sich nach außen zu bewegen.)

Drallsatz in integraler Form:

$$L(t = t^*) - L(t = 0) = J(\dot{\varphi}^* - \cancelto{0}{\dot{\varphi}_0}) = \int\limits_{t=0}^{t=t^*} M(t)\mathrm{d}t = \frac{M_0}{T^2} \int\limits_{t=0}^{t=t^*} t^2\mathrm{d}t = \frac{M_0}{T^2}\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^{t^*} = \frac{M_0 t^{*3}}{3T^2}$$

$$\rightarrow \dot{\varphi}^* = \frac{M_0 t^{*3}}{3T^2 J}$$



Impulssatz Punktmasse in vertikaler Richtung (Kräftegleichgewicht):

$$0 = F_2 \sin\alpha + F_1 \cos\alpha - mg \tag{1}$$

Impulssatz Punktmasse in radialer Richtung:

$m\ddot{r} = F_2 \cos\alpha - F_1 \sin\alpha$ mit $\ddot{r} = -R\dot{\varphi}^2$ (Zentripetalbeschleunigung aufgrund der Kreisbewegung)(2)

Musterlösungen (ohne Gewähr)

Wenn die Punktmassen beginnen, sich zu lösen, gilt gerade $F_2 = 0$

aus (1): $F_1^* = \dfrac{mg}{\cos\alpha}$

in (2) eingesetzt: $-\cancel{m}R\dot{\varphi}^{*2} = -\cancel{m}g\tan\alpha = -\cancel{m}\dfrac{\sqrt{3}}{3}g \rightarrow \dot{\varphi}^* = \sqrt{\dfrac{\sqrt{3}}{3}\dfrac{g}{R}} = \dfrac{M_0 t^{*3}}{3T^2 J}$

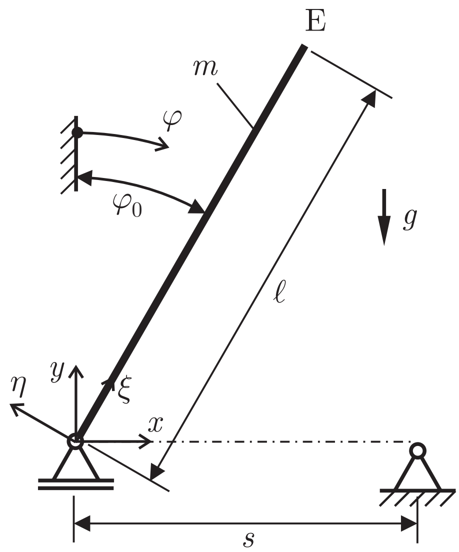
$\rightarrow t^* = \sqrt[3]{\sqrt{3\sqrt{3}\dfrac{g}{R}} \cdot \dfrac{T^2(J_\mathrm{K} + 2mR^2)}{M_0}}$

Tipps und Tricks

- Wenn sich zwei Körper in einem Punkt gerade voneinander lösen, werden die Kontaktkräfte in diesem Punkt gerade zu Null!
- Wenn die Kräfte nach ihrer Richtung schon bekannt sind bzw. eine Bindung nur in einer Richtung Kräfte übertragen *kann*, dann sollten bzw. *müssen* diese Kräfte auch im Freikörperbild in der korrekten Richtung angetragen werden. Hier liegen die Punktmassen nur auf den Flächen der Nuten auf, es können keine 'Zugkräfte' übertragen werden (einseitige Bindung)!
- Plausibilitätskontrolle: $M_0 \uparrow \rightarrow t^* \downarrow$; $J_\mathrm{K}, m \uparrow \rightarrow t^* \uparrow$; $T \uparrow \rightarrow t^* \uparrow$; der Einfluss von R ist nicht sofort ersichtlich, da zum einen das gesamte Massenträgheitsmoment J steigt und damit t^* steigt, andererseits nimmt die Zentripetalbeschleunigung mit größerem R zu, was zu kleinerem t^* führt.
- Einheitenkontrolle: $[t^*] = \sqrt[3]{\sqrt{\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2\ m}}} \cdot \dfrac{\mathrm{s^2\ kg\ m^2}}{\mathrm{Nm}}} = \sqrt[3]{\sqrt{\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2\ m}}} \cdot \dfrac{\mathrm{s^2\ kg\ m^2}}{\frac{\mathrm{kg\ m}}{\mathrm{s^2}}\mathrm{m}}} = \mathrm{s}$

Musterlösungen (ohne Gewähr)

Aufgabe 10



Ein durch ein Loslager horizontal geführter homogener starrer Balken (Länge ℓ, Masse m) wird aus der skizzierten Ruhelage ($\varphi_0 = 30°$) stoßfrei losgelassen und fällt unter dem Einfluss seiner Gewichtskraft nach unten. In der horizontalen Lage soll das rechte Ende E des Balkens gerade auf das Festlager treffen.

a) Wie groß muss der Abstand s der beiden Lager gewählt werden?

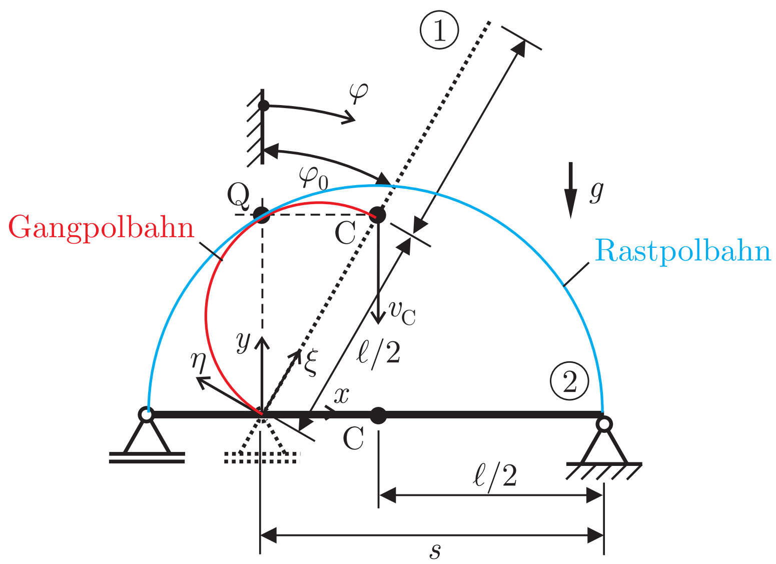
b) Bestimmen Sie die Gleichungen der Gang- und Rastpolbahn und zeichnen Sie beide für die skizzierte Lage ein! Nutzen Sie für die Herleitung die gegebenen Koordinatensysteme!

c) Bestimmen Sie die Auftreffgeschwindigkeit $\vec{v}_E$ des rechten Balkenendes E auf dem Festlager nach Betrag und Richtung!

Gegeben: ℓ, m, $\varphi_0 = 30°$, g.

Hinweis: Das x-y-Koordinatensystem ist raumfest und sein Ursprung fällt für $\varphi = \varphi_0$ mit dem Loslager zusammen. Das ξ-η-Koordinatensystem ist fest mit dem Balken verbunden.

Lösung



a) Da keine Kräfte in horizontaler Richtung auf den Balken wirken, fällt der Schwerpunkt C senkrecht nach unten. Der Abstand ergibt sich dann aus einfachen geometrischen Überlegungen zu $s = \frac{\ell}{2} + \sin\varphi_0 \frac{\ell}{2} = \frac{3}{4}\ell$.

Musterlösungen (ohne Gewähr)

b)

Rastpolbahn:

$$x_Q = \frac{\ell}{2}(\sin\varphi_0 - \sin\varphi) = \frac{\ell}{2}\left(\frac{1}{2} - \sin\varphi\right),\ y_Q = \frac{\ell}{2}\cos\varphi$$

$$\sin^2\varphi = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\ell}x_Q\right)^2,\ \cos^2\varphi = \left(\frac{2}{\ell}y_Q\right)^2 \rightarrow \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\ell}x_Q\right)^2 + \left(\frac{2}{\ell}y_Q\right)^2$$

$$\rightarrow \left(\frac{\ell}{4} - x_Q\right)^2 + y_Q^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \rightarrow \text{Kreis mit Radius } r = \frac{\ell}{2} \text{ und Mittelpunkt M} \left(\frac{\ell}{4}, 0\right)$$

Gangpolbahn:

$$\xi_Q = y_Q\cos\varphi = \frac{\ell}{2}\cos^2\varphi \rightarrow \cos^2\varphi = \frac{2\xi_Q}{\ell};$$

$$\eta_Q = y_Q\sin\varphi = \frac{\ell}{2}\cos\varphi\sin\varphi = \frac{\ell}{2}\cos\varphi\sqrt{1-\cos^2\varphi}$$

$$\rightarrow \eta_Q^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2\cos^2\varphi(1-\cos^2\varphi) = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2\frac{2\xi_Q}{\ell}\left(1 - \frac{2\xi_Q}{\ell}\right) = \frac{\xi_Q\ell}{2} - \xi_Q^2 = -\left[\left(\xi_Q - \frac{\ell}{4}\right)^2 - \left(\frac{\ell}{4}\right)^2\right]$$

$$\rightarrow \left(\xi_Q - \frac{\ell}{4}\right)^2 + \eta_Q^2 = \left(\frac{\ell}{4}\right)^2 \rightarrow \text{Kreis mit Radius } r = \frac{\ell}{4} \text{ und Mittelpunkt M} \left(\frac{\ell}{4}, 0\right)$$

c)

In der horizontalen Lage fällt der Momentanpol in das Loslager → reine Rotation um den Lagerpunkt!

System ist konservativ → Energieerhaltungssatz:

$$T_2 + U_2 = T_1 + U_1,\ T_1 = 0,\ U_1 = mg\frac{\ell}{2}\cos\varphi_0 = \frac{1}{4}\sqrt{3}mg\ell,\ U_2 = 0$$

$$T_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}m\ell^2\omega_2^2 = U_1 - U_2 = \frac{1}{4}\sqrt{3}mg\ell \rightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{3}{2}\sqrt{3}\frac{g}{\ell}}$$

In der horizontalen Position haben alle Punkte des Balkens nur vertikale Geschwindigkeitskomponenten. Das rechte Ende des Balkens trifft also mit $|\vec{v}_E| = \ell\omega_2 = \sqrt{\frac{3}{2}\sqrt{3}g\ell}$ auf dem Festlager auf (vertikal nach unten).

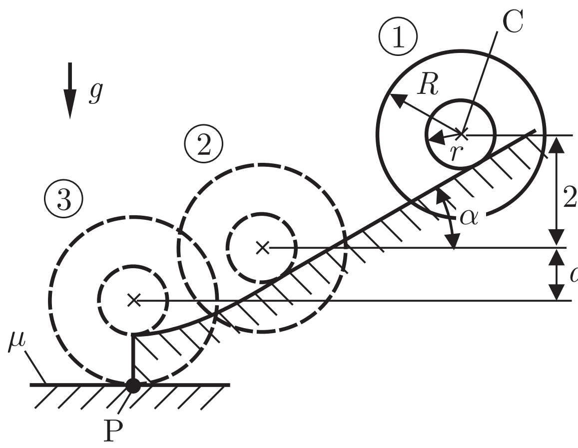
Tipps und Tricks

Wirken in einer Richtung auf einen Körper *keine* äußeren Kräfte, so bleibt der Impuls in dieser Richtung erhalten! Hier ist der Impuls zu Beginn Null, d.h. die Schwerpunktgeschwindigkeit in x-Richtung muss auch Null bleiben, da in dieser Richtung aufgrund des Loslagers keine Kräfte wirken!

Musterlösungen (ohne Gewähr)

Aufgabe 11

Ein aus zwei Zylindern (Radien r, R) bestehender Körper (Gesamtmasse m, Schwerpunkt C) wird aus der Ruhelage (1) heraus losgelassen und rollt auf dem Radius r schlupffrei eine schiefe Ebene hinab (Winkel α gegenüber der Horizontalen). Er erreicht nach der Zeit Δt die Lage (2). Im Anschluss durchläuft der Körper eine gekrümmte Bahn und trifft in der Lage (3) mit dem äußeren Radius R stoßfrei auf eine horizontale Ebene (Reibkoeffizient μ).



a) Wir groß ist das Massenträgheitsmoment $J^{(\mathrm{C})}$ bezüglich des Schwerpunktes C?

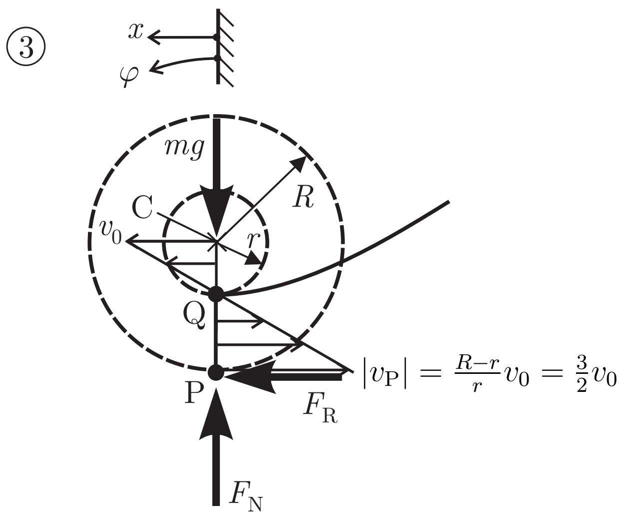
Im Folgenden gelte $J^{(\mathrm{C})} = 5mr^2$.

b) Wie groß ist die Geschwindigkeit des Aufstandspunktes P in der Lage (3)?

c) Wie lange dauert es nach Erreichen der Lage (3), bis der Körper auf der horizontalen Ebene nicht mehr rutscht?

Gegeben: r, $R = \dfrac{5}{2}r$, a, α, m, Δt, μ, g.

Lösung



Musterlösungen (ohne Gewähr)

a) Drallsatz um den Aufstandspunkt (Momentanpol Q): $J^{(Q)}\ddot{\varphi} = mgr\sin\alpha$

Kinematik für reines Rollen: $\varphi = \dfrac{\xi}{r}$ mit ξ als Koordinate in Richtung der schiefen Ebene (abwärts gerichtet).

$$\ddot{\varphi} = \frac{\ddot{\xi}}{r} = \frac{mgr\sin\alpha}{J^{(Q)}} \rightarrow \xi(\Delta t) = \frac{1}{2}\frac{mgr^2\sin\alpha}{J^{(Q)}}(\Delta t)^2 \overset{!}{=} \frac{2a}{\sin\alpha} \rightarrow J^{(Q)} = \frac{mgr^2\sin^2\alpha(\Delta t)^2}{4a}$$

$$J^{(C)} = J^{(Q)} - mr^2 = mr^2\left(\frac{g\sin^2\alpha(\Delta t)^2}{4a} - 1\right)$$

b) $J^{(C)} = 5mr^2$, $J^{(Q)} = 5mr^2 + mr^2 = 6mr^2$

Energieerhaltungssatz: $T_2 + U_2 = T_1 + U_1$; $T_1 = 0$; $U_1 - U_2 = 3mga$; $T_2 = \dfrac{1}{2}J^{(Q)}\dot{\varphi}^2 = 3mr^2\left(\dfrac{\dot{x}_C}{r}\right)^2$

$T_2 = U_1 - U_2 \rightarrow \dot{x}_C = v_0 = \sqrt{ga}$ (Schwerpunktgeschwindigkeit in der Lage 3)

$$\dot{\varphi}_0 = \frac{v_0}{r} = \frac{\sqrt{ga}}{r}$$

$\dot{x}_P = v_0 - R\dot{\varphi}_0 = \left(1 - \dfrac{R}{r}\right)\sqrt{ga} = -\dfrac{3}{2}\sqrt{ga}$ (negativ im Sinne der Koordinate x, wenn $R > r$)

c) P ist 'zu schnell', um die Rollbedingung zu erfüllen, daher tritt in P unmittelbar nach Verlassen der gekrümmten Bahn Gleitreibung mit der Reibkraft $F_R = \mu F_N = \mu mg$ auf.

Drallsatz: $J^{(C)}\ddot{\varphi} = -F_R R \rightarrow \dot{\varphi} = -\dfrac{F_R R}{J^{(C)}}t + \dot{\varphi}_0$

Impulssatz: $m\ddot{x}_C = F_R \rightarrow \dot{x}_C = \dfrac{F_R}{m}t + v_0$

Für Zeitpunkt $t = t^*$ soll wieder Rollbedingung gelten (jetzt mit Radius R!):

$$\dot{x}_C = R\dot{\varphi} \rightarrow \frac{F_R}{m}t^* + v_0 = \dot{\varphi}_0 R - \frac{F_R R^2}{J^{(C)}}t^*$$

$$\begin{aligned}\rightarrow t^* &= \frac{\dot{\varphi}_0 R - v_0}{\mu mg\left(\frac{1}{m} + \frac{R^2}{5mr^2}\right)} = \frac{\left(\sqrt{ga}\frac{R}{r} - \sqrt{ga}\right)\cdot 5r^2}{\mu g(5r^2 + R^2)} \\ &= \frac{5}{\mu}\sqrt{\frac{a}{g}}\left(\frac{\frac{R}{r} - 1}{5 + \frac{R^2}{r^2}}\right) = \frac{5}{\mu}\sqrt{\frac{a}{g}}\left(\frac{\frac{3}{2}}{5 + \frac{25}{4}}\right) = \frac{2}{3\mu}\sqrt{\frac{a}{g}}\end{aligned}$$

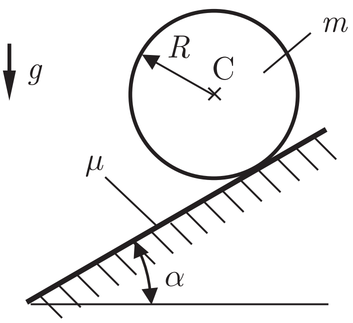
Tipps und Tricks

- Die auf eine Masse m aufgrund des Schwerepotentials wirkende Hangabtriebskraft auf einer schiefen Ebene ist $F = mg\sin\alpha$ mit dem Winkel α zwischen der schiefen Ebene und der Horizontalen!
- Bei Anwendung der Rollbedingung auf den Rollradius achten!
- Das Massenträgheitsmoment ist immer am kleinsten bezüglich des Schwerpunktes C!

Musterlösungen (ohne Gewähr)

Aufgabe 12

Ein Zylinder (Radius R, Masse m) soll unter den Einfluss seiner Gewichtskraft ohne zu rutschen eine schiefe Ebene (Winkel α gegenüber der Horizontalen) hinabrollen. Er wird aus der Ruhelage heraus losgelassen. Zwischen Ebene und Zylinder herrscht Reibung (Reibkoeffizient μ).



Wir groß darf der Winkel α maximal sein, damit zwischen Ebene und Zylinder kein Rutschen auftritt?

Gegeben: R, m, $\mu = 1/3$, g.

Hinweis: Haft- und Gleitreibkoeffizient sollen identisch sein.

Lösung

Impulssatz hangabwärts: $m\ddot{x} = mg\sin\alpha - F_\mathrm{R}$

Impulssatz senkrecht zur Hangrichtung (kein Abheben des Zylinders!):
$m\ddot{y} \overset{!}{=} 0 = mg\cos\alpha - F_\mathrm{N} \rightarrow F_\mathrm{N} = mg\cos\alpha$

Drallsatz um den Aufstandspunkt: $J^{(\mathrm{Q})}\ddot{\varphi} = mgR\sin\alpha$ mit $J^{(\mathrm{Q})} = \frac{3}{2}mR^2$

Kinematik (Erfüllung der Rollbedingung): $\dot{x} = R\dot{\varphi} \rightarrow \ddot{x} = R\ddot{\varphi}$

$\rightarrow \frac{3}{2}\cancel{m}R^{\cancel{2}}\frac{\ddot{x}}{\cancel{R}} = \cancel{m}g\cancel{R}\sin\alpha \rightarrow \ddot{x} = \frac{2}{3}g\sin\alpha$
$\rightarrow m\frac{2}{3}g\sin\alpha = mg\sin\alpha - F_\mathrm{R} \rightarrow F_\mathrm{R} = \frac{1}{3}mg\sin\alpha$

Für die Haftreibkraft muss $|F_\mathrm{R}| \leq \mu F_\mathrm{N}$ gelten:

$\rightarrow \frac{1}{3}\cancel{mg}\sin\alpha \leq \mu\cancel{mg}\cos\alpha \rightarrow \tan\alpha \leq 3\mu = 1 \rightarrow \alpha \leq 45°$

Tipps und Tricks

Auf der schiefen Ebene muss Reibung vorhanden sein, da es sonst kein beschleunigendes Moment gibt! Der Körper würde bei $\mu = 0$ aufgrund der Hangabtriebskraft translatorisch nach unten rutschen. *Kein Rutschen* bzw. *Rollen* heißt also nicht reibungsfrei, sondern nur, dass die Haftreibkraft ausreichend groß ist, um eine Relativbewegung im Aufstandspunkt zu verhindern!

Musterlösungen (ohne Gewähr)

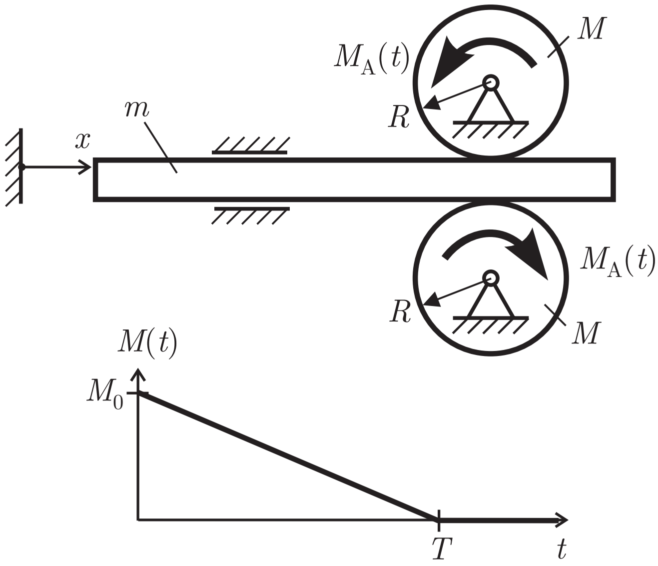
Aufgabe 13

Ein Brett (Masse m) wird wie skizziert zwischen zwei Rollen (jeweils Radius R, Masse M) gehalten. Jede Rolle wird durch das skizzierte zeitabhängige Antriebsmoment $M_\mathrm{A}(t)$ angetrieben. Das System befindet sich für $t = 0$ in Ruhe.

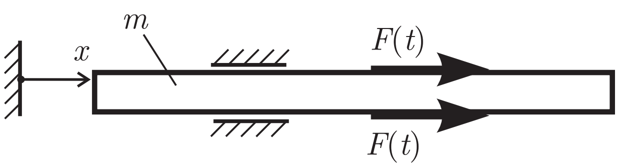
Wir groß ist die Geschwindigkeit v^* des Brettes zum Zeitpunkt T?

Gegeben: R, m, M, $M_\mathrm{A}(t)$, M_0, T.

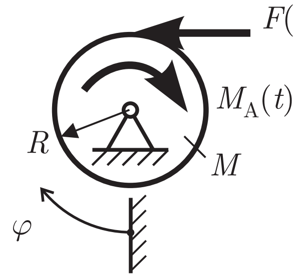
Hinweis: Zwischen Rollen und Brett tritt kein Schlupf auf.



Lösung



untere Rolle (obere analog)



Alternative I: Impuls- und Drallsatz

Impulssatz Brett: $m\ddot{x} = 2F$

Drallsatz Rolle: $\frac{1}{2}MR^2\ddot{\varphi} = M_\mathrm{A} - RF \rightarrow F = \frac{1}{R}\left(M_\mathrm{A} - \frac{1}{2}MR^2\ddot{\varphi}\right)$

Kinematik: $\dot{\varphi} = \frac{\dot{x}}{R} \rightarrow \ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}}{R} \rightarrow F = \frac{M_\mathrm{A}}{R} - \frac{1}{2}M\ddot{x}$

$\rightarrow m\ddot{x} = 2\frac{M_\mathrm{A}}{R} - M\ddot{x} \rightarrow \ddot{x} = \frac{2M_\mathrm{A}}{R(M+m)}$

$$\rightarrow \dot{x}(t=T) - \cancelto{0}{\dot{x}(t=0)} = \frac{2}{R(M+m)}\underbrace{\int_0^T M_\mathrm{A}(t)\mathrm{d}t}_{\frac{1}{2}M_0T} = \frac{M_0T}{R(M+m)} = v^*$$

Alternative II: Arbeitssatz

$T_2 + U_2 = T_1 + U_1 + W_{12}^{\text{n.k.}}$

Musterlösungen (ohne Gewähr)

$$T_1 = 0,\ U_1 = 0,\ U_2 = 0,\ T_2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + 2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}MR^2\dot{\varphi}^2\right) = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2$$

$$W_{12}^{\text{n.k.}} = 2\int\limits_0^T \underbrace{M_\mathrm{A}(t)\dot{\varphi}(t)}_{\text{Leistung des Antriebsmomentes}} \mathrm{d}t$$

Ableiten ergibt Leistungsbilanz:

$$2M_\mathrm{A}(t)\overset{\cancel{\dot{x}}/R}{\cancel{\dot{\varphi}}} = (M+m)\cancel{\dot{x}}\,\ddot{x} \rightarrow \ddot{x} = \frac{2M_\mathrm{A}}{R(M+m)} \text{ (siehe oben)}$$

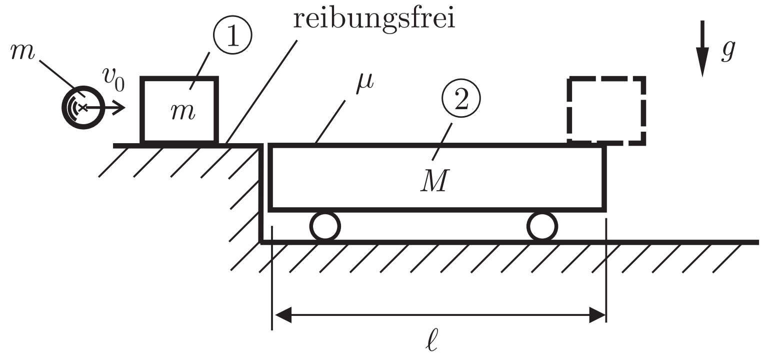
Tipps und Tricks

- Grafische Integration geht häufig sehr viel schneller als die rechnerische, insbesondere bei linearen Funktionen (Flächeninhalt unter der Kurve)!
- Eingeprägte Kräfte bzw. Momente lassen sich nicht aus einem Potential herleiten und sind damit den nicht-konservativen Kräfte zuzurechen. Sie ändern den Energiehaushalt des Systems!

Musterlösungen (ohne Gewähr)

Aufgabe 14

Eine Kugel (Masse m) stößt mit der Geschwindigkeit v_0 gegen einen Quader 1 (Masse m, Stoßziffer $e = 1$). Dieser gleitet zunächst reibungsfrei auf einer Ebene und rutscht anschließend auf ein Brett 2 (Länge ℓ, Masse M), das auf masselosen Rädern abrollen kann. Zwischen dem Brett und dem Quader tritt Reibung auf (Reibkoeffizient μ). Beide sind vor dem Stoß in Ruhe.



a) Wie groß ist die gemeinsame Geschwindigkeit v^* von Brett und Quader, wenn der Quader auf dem Brett nicht mehr rutscht?

b) Welche Länge ℓ muss das Brett haben, damit der Quader gerade am rechten Ende des Brettes zum Liegen kommt?

Gegeben: v_0, m, M, μ, $e = 1$, g.

Hinweis: Betrachten Sie den Quader als Punktmasse.

Lösung

Stoßgesetz (Großbuchstaben nach dem Stoß, Kleinbuchstaben vor dem Stoß):

$e = -\dfrac{V_1 - V_0}{v_1 - v_0} = 1$; $v_1 = 0 \rightarrow V_0 = V_1 - v_0$

Impulssatz für Stoßvorgang: $mv_0 = mV_0 + mV_1 = mV_1 - mv_0 + mV_1 \rightarrow V_1 = v_0$

(oder direkt aus Formelsammlung, da gerader, zentraler Stoß)

a) Impulssatz für 1: $m\ddot{x}_1 = -F_\text{R} = -\mu F_\text{N} = -\mu mg \rightarrow \dot{x}_1 = -\mu gt + v_0$
Impulssatz für 2: $M\ddot{x}_2 = F_\text{R} = \mu F_\text{N} = \mu mg \rightarrow \dot{x}_2 = \mu\dfrac{m}{M}gt$
Forderung $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = v^* \rightarrow -\mu gt^* + v_0 = \mu\dfrac{m}{M}gt^* \rightarrow t^* = \dfrac{v_0}{\mu g\left(1 + \frac{m}{M}\right)} \rightarrow v^* = \dfrac{m}{M+m}v_0$
oder direkt Impulssatz für Gesamtsystem aus Quader und Brett (keine äußeren Kräfte!):
$mV_1 = mv_0 = (M+m)v^* \rightarrow v^* = \dfrac{m}{M+m}v_0$

Musterlösungen (ohne Gewähr)

b) <u>Alternative I: Impulssatz</u>

Länge des Brettes $\ell \overset{!}{=} x_1^* - x_2^*$ (Relativweg zwischen Quader und Brett)

$x_1^* = -\frac{1}{2}\mu g t^{*2} + v_0 t^*$

$x_2^* = \frac{1}{2}\mu \frac{m}{M} g t^{*2}$

$\rightarrow \ell = x_1^* - x_2^* = -\frac{1}{2}\mu g t^{*2} + v_0 t^* - \frac{1}{2}\mu \frac{m}{M} g t^{*2}$

Mit $t^* = \dfrac{v_0}{\mu g \left(1 + \frac{m}{M}\right)} \rightarrow \ell = \dfrac{1}{2\mu g}\dfrac{M}{M+m}v_0^2$

<u>Alternative II: Arbeitssatz</u>

$T_2 + U_2 = T_1 + U_1 + W_{12}^{\text{n.k.}}$

$T_1 = \frac{1}{2}mV_1^2 = \frac{1}{2}mv_0^2;\ U_1 = U_2 = 0;\ T_2 = \frac{1}{2}(M+m)v^{*2};\ W_{12}^{\text{n.k.}} = -F_{\text{R}}\ell = -\mu F_{\text{N}}\ell = -\mu m g \ell$

$$\begin{aligned}\rightarrow W_{12}^{\text{n.k.}} &= T_2 - T_1 \rightarrow -\mu m g \ell = \frac{1}{2}(M+m)\left(\frac{m}{M+m}v_0\right)^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{m^2}{M+m} - m\right)v_0^2 = -\frac{1}{2}\frac{Mm}{M+m}v_0^2\end{aligned}$$

$\rightarrow \ell = \dfrac{1}{2\mu m g}\dfrac{Mm}{M+m}v_0^2 = \dfrac{1}{2\mu g}\dfrac{M}{M+m}v_0^2$

Tipps und Tricks

Formeln aus der Formelsammlung für geraden, zentralen Stoß nur anwenden, wenn dies auch einer ist (hier möglich, da Stoßnormale durch Schwerpunkte und relative Auftreffgeschwindigkeit in genau dieser Richtung)!

Musterlösungen (ohne Gewähr)

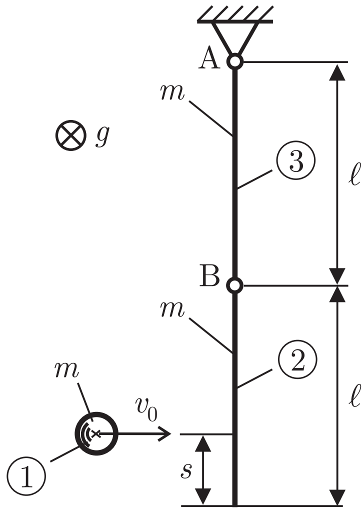
Aufgabe 15

Eine Kugel (1) (Masse m) stößt mit der Geschwindigkeit v_0 gegen einen homogenen Stab (2) (Länge ℓ, Masse m, Stoßziffer e). Der Stab (2) ist über ein Gelenk B mit einem identischen Stab (3) verbunden, der in A drehbar gelagert ist. Beide Stäbe sind zunächst in Ruhe.

a) Wie muss der Abstand s gewählt werden, damit der Stab (2) unmittelbar nach dem Stoß eine reine Translationsbewegung ausführt?

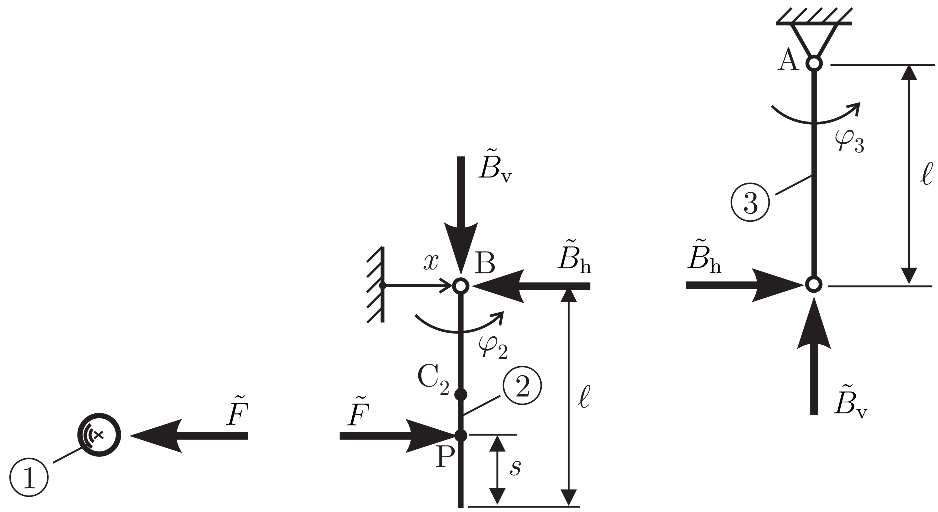
b) Wie groß ist in diesem Fall seine translatorische Geschwindigkeit V_2 nach dem Stoß?

<u>Gegeben:</u> ℓ, v_0, m, e.



Lösung

Freikörperbild für den Stoßvorgang:



Stoßvorgang: vor dem Stoß: Kleinbuchstaben; nach dem Stoß: Großbuchstaben

Drallsatz (integrale Form) um Schwerpunkt für (2): $J^{(C_2)}\left(\dot{\Phi}_2 - \dot{\varphi}_2\right) = \dfrac{\ell}{2}\tilde{B}_h + \left(\dfrac{\ell}{2} - s\right)\tilde{F}$ (1)

Impulssatz (integrale Form) für (2): $m\left(V_{C_2} - v_{C_2}\right) = \tilde{F} - \tilde{B}_h$ (2)

Drallsatz (integrale Form) um Lager A für (3): $\dfrac{1}{3}m\ell^2\left(\dot{\Phi}_3 - \dot{\varphi}_3\right) = \ell\tilde{B}_h$ (3)

Impulssatz (integrale Form) für (1): $m\left(V_1 - v_1\right) = -\tilde{F}$ (4)

Stoßgesetz: $e = -\dfrac{V_P - V_1}{v_P - v_1}$ (5)

Kinematik: $V_B = \dot{\Phi}_3\ell$ (6)

Musterlösungen (ohne Gewähr)

Anfangsbedingungen: $v_{\mathrm{C}_2} = v_{\mathrm{P}} = 0,\ \dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi}_3 = 0$ (7)

Forderung: $\dot{\Phi}_2 = 0 \rightarrow V_{\mathrm{B}} = V_{\mathrm{C}_2} = V_{\mathrm{P}} = V_2$ (8)

(alle Punkte von 2 besitzen identische Geschwindigkeiten!)

$\rightarrow$ 6 Gleichungen, 6 Unbekannte: $\tilde{B}_{\mathrm{h}}$, $\tilde{F}$, V_1, V_2, $\dot{\Phi}_3$, s. $\rightarrow$ geschicktes Auflösen!

a) (6), (7), (8) in (3): $\tilde{B}_{\mathrm{h}} = \frac{1}{3} m V_2$ (9)

(7) in (2): $\tilde{F} = \tilde{B}_{\mathrm{h}} + m V_2 = \frac{4}{3} m V_2$ (10)

(7), (8), (9), (10) in (1):

$0 = \frac{\ell}{2} \cdot \frac{1}{3} m V_2 + \left(\frac{\ell}{2} - s\right) \frac{4}{3} m V_2 \rightarrow s = \frac{5}{8}\ell$ (P liegt also oberhalb von C_2) (11)

b) (7), (8) in (5): $V_1 = V_2 - e v_1$ (12)

(10), (12) in (4): $V_2 = \frac{3}{7}(e+1) v_1$ (13)

Tipps und Tricks

- Für Stoßvorgänge ist häufig die integrale Form von Impuls- und Drallsatz hilfreich. Eine Stoßkraft und ein hieraus resultierendes -moment werden dann zu den integralen Größen Kraft- bzw. Momentenstoß (durch $(\tilde{..})$ gekennzeichnet)!
- Die Sätze für den geraden, zentralen Stoß sind hier nicht anwendbar, da Stoß nicht zentral!
- Es lässt sich hier für 2 auch der Drallsatz um B nutzen, dann fällt $\tilde{B}_{\mathrm{h}}$ im Drallsatz heraus, aber das Integral des Kreuzproduktes $\vec{r}_{\mathrm{BC}_2} \times m\vec{a}_{\mathrm{B}}$ verschwindet nicht! In integraler Form ergibt $\int_{t_-}^{t_+} a_{\mathrm{B}}(t)\mathrm{d}t = V_2$ über der Stoßzeit $t_{\mathrm{S}} = t_+ - t_-$. Der Drallsatz um B liefert nach Ausrechnen des Kreuzproduktes $m\frac{\ell}{2}V_2 = (\ell - s)\tilde{F}$, was mit Gl. (10) auf die gleiche Lösung für s führt.