Institut für Dynamik und Schwingungen
Leibniz Universität Hannover

Repetitorium

Technische Mechanik IV / Technische Schwingungslehre

Version 3.1, 09.02.2010

Dr.-Ing. L. Panning

Institut für Dynamik und Schwingungen

Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover

Dieses Repetitorium soll helfen,

- klassische Aufgabentypen aus der Technischen Mechanik zu beherrschen,
- häufig auftretende Fehler zu vermeiden und
- anhand durchgerechneter Beispiele verschiedene Lösungswege beurteilen zu können.

Dieses Repetitorium soll nicht

- als Probeklausur interpretiert werden,
- den Anspruch auf eine vollständige Abdeckung des Lehrstoffes erheben und
- als Hinweis auf den Klausurinhalt verstanden werden!

Ziel ist es, eine Sammlung charakteristischer Fragestellungen mit entsprechenden Lösungswegen bereitzustellen. Einige ausgewählte Aufgaben werden dann beispielhaft während des Repetitoriums durchgerechnet und diskutiert.

Dank an die wissenschaftlichen MitarbeiterInnen des IKM und IDS für die tatkräftige Unterstützung!

Bei Anregungen oder Korrekturen bitte kurze E-Mail an lehre@ids.uni-hannover.de.

Dr.-Ing. Lars Panning

Musterlösungen (ohne Gewähr)

Frage 1

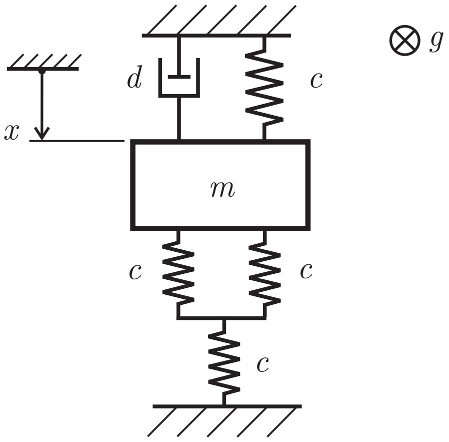
Gegeben ist das skizzierte schwingungsfähige System.

a) Geben Sie die Ersatzfederkonstante c_{ers} an!

b) Wie lautet die Bewegungsgleichung?

c) Geben Sie die Eigenkreisfrequenz ω_{d} für gedämpfte Schwingungen an!

Gegeben: m, c, $d = 2\sqrt{cm}$.



$c_{\text{ers}} =$

Bewegungsgleichung:

$\omega_{\text{d}}=$

Lösung

a) Ersatzfederkonstante:
Zwei Federn c parallel: $c_1 = 2c$; Federn c_1 und c in Reihe: $c_2 = \dfrac{1}{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c}} = \dfrac{c_1 c}{c_1 + c} = \dfrac{2}{3}c$;
Federn c_2 und c parallel: $c_{\text{ers}} = c_2 + c = \dfrac{5}{3}c$

b) Feder-Dämpfer-Masse-Ersatzsystem mit c_{ers}, d, m
Bewegungsgleichung: $m\ddot{x} + d\dot{x} + \dfrac{5}{3}cx = 0$

c) $\omega_{\text{d}} = \omega_0\sqrt{1 - D^2}$
Mit $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{5c}{3m}}$ und $D = \dfrac{d}{2\sqrt{\frac{5}{3}cm}} = \sqrt{\dfrac{3}{5}} \rightarrow \omega_{\text{d}} = \sqrt{\dfrac{2c}{3m}}$

Musterlösungen (ohne Gewähr)

Tipps und Tricks

- Federn c und c_2 sind parallel (identische Längenänderung durch schwingende Masse) - keine Reihenschaltung!
- *Zwei* Federn c_A und c_B in Reihe: Ersatzfederkonstante $c_\mathrm{AB} = \dfrac{1}{\frac{1}{c_\mathrm{A}} + \frac{1}{c_\mathrm{B}}} = \dfrac{c_\mathrm{A} c_\mathrm{B}}{c_\mathrm{A} + c_\mathrm{B}}$ $\rightarrow$ häufig schneller zu rechnen!

Musterlösungen (ohne Gewähr)

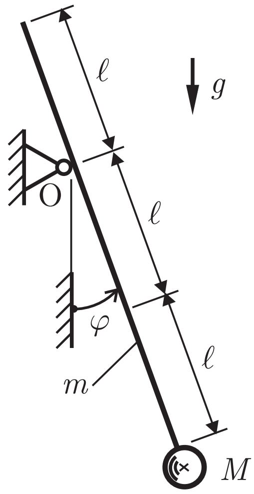
Frage 2

Ein Pendel besteht aus einem homogenen Stab (Länge 3ℓ, Masse m) und einer Punktmasse M.

a) Geben Sie das Massenträgheitsmoment des Pendels bezüglich des Lagerpunktes O an!

b) Bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenz ω_0 für kleine Schwingungen!

<u>Gegeben:</u> ℓ, m, $M = 2m$, g.



$J^{(\mathrm{O})} =$

$\omega_0 =$

Lösung

a) $$J^{(\mathrm{O})} = \underbrace{\frac{1}{12}m(3\ell)^2 + \underbrace{m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2}_{\text{Steiner-Anteil}}}_{\text{Stab}} + \underbrace{M(2\ell)^2}_{\text{Punktmasse}} = 9m\ell^2$$

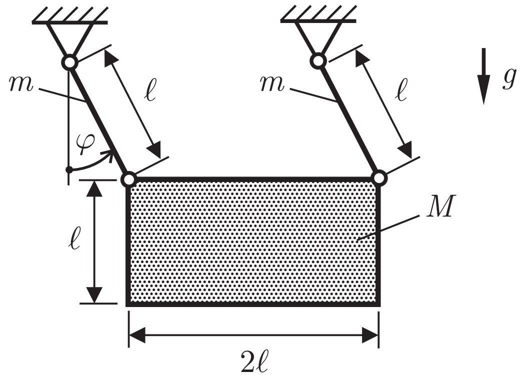
b) $$J^{(\mathrm{O})}\ddot{\varphi} + \underbrace{\left(2Mg\ell + mg\frac{\ell}{2}\right)\sin\varphi}_{\text{rückstellendes Moment durch Gewichtskräfte}} = 0 \overset{\sin\varphi\approx\varphi}{\rightarrow} \omega_0^2 = \frac{2M + \frac{1}{2}m}{J^{(\mathrm{O})}}g\ell = \frac{1}{2}\frac{g}{\ell} \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{2\ell}}$$

Tipps und Tricks

- Bei der Berechnung des Massenträgheitsmomentes auf die korrekte Länge und Masse des Körpers achten!
- Das Massenträgheitsmoment ist bezüglich des Schwerpunktes minimal. Es lässt sich *nicht* mit dem Steiner-Anteil zwischen zwei beliebigen Bezugspunkten A und B 'direkt' bestimmen, sondern es muss der 'Umweg' über der Schwerpunkt gegangen werden: $J^{(\mathrm{A})} = J^{(\mathrm{C})} + m|\vec{r}_{\mathrm{CA}}|^2$ bzw. $J^{(\mathrm{B})} = J^{(\mathrm{C})} + m|\vec{r}_{\mathrm{CB}}|^2$, aber im Allgemeinen ist $J^{(\mathrm{B})} \neq J^{(\mathrm{A})} + m|\vec{r}_{\mathrm{AB}}|^2$, da $|\vec{r}_{\mathrm{AB}}|^2 = |\vec{r}_{\mathrm{CB}}|^2 - |\vec{r}_{\mathrm{CA}}|^2$ nur in Sonderfällen gilt!
- Der Einfluss des Schwerefeldes kann hier nicht herausgerechnet werden, da die Gewichtskraft bei einer Auslenkung für das rückstellende Moment sorgt!

Musterlösungen (ohne Gewähr)

Frage 3



Eine homogene Rechteckplatte (Breite 2ℓ, Höhe ℓ, Masse M) ist pendelnd an zwei Stäben (jeweils Länge ℓ, Masse m) aufgehängt und führt kleine Schwingungen aus.

a) Bestimmen Sie die potentielle Energie U des Systems in Abhängigkeit des Winkels φ!

b) Bestimmen Sie die kinetische Energie T des Systems in Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$!

c) Geben Sie die Bewegungsgleichung an!

d) Wie lautet die Eigenkreisfrequenz ω_0 des Systems?

Gegeben: ℓ, m, $M = 4m$, g.

Hinweis: Wählen Sie das Nullniveau für das Schwerepotential in Höhe der Festlager.

$U =$	$T =$

Bewegungsgleichung:

	$\omega_0 =$

Musterlösungen (ohne Gewähr)

Lösung

a) $U = 2\underbrace{\left(-mg\frac{\ell}{2}\cos\varphi\right)}_{U_{\text{Stab}}}\underbrace{-Mg\left(\ell\cos\varphi+\frac{\ell}{2}\right)}_{U_{\text{Platte}}} = -\left(m+M\right)g\ell\cos\varphi - \frac{1}{2}Mg\ell = -5mg\ell\cos\varphi - 2mg\ell$

b) $T = 2\underbrace{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}m\ell^2\dot{\varphi}^2\right)}_{T_{\text{Stab}}} + \underbrace{\frac{1}{2}M(\ell\dot{\varphi})^2}_{T_{\text{Platte}}} = \left(\frac{1}{3}m+\frac{1}{2}M\right)\ell^2\dot{\varphi}^2 = \frac{7}{3}m\ell^2\dot{\varphi}^2$

Da die Stablängen identisch sind, führt die Platte eine reine Translationsbewegung aus. Die Schwerpunktgeschwindigkeit $v_{\text{C}} = \ell\dot{\varphi}$ entspricht somit der Geschwindigkeit der Aufhängepunkte, da *alle* Punkte der Platte identische Geschwindigkeiten aufweisen (in der kinetischen Energie ist in diesem Fall die Rotationsenergie identisch Null).

c) Konservatives System:

$E_{\text{ges}} = U(\varphi) + T(\dot{\varphi}) = \text{const.} \rightarrow \frac{\text{d}}{\text{d}t}E_{\text{ges}} = 0$

$\frac{\text{d}}{\text{d}t}E_{\text{ges}} = \frac{\text{d}}{\text{d}t}(U(\varphi)+T(\dot{\varphi})) = 5mg\ell\cancel{\dot{\varphi}}\,\cancel{\sin\varphi}^{\approx\varphi} + \frac{14}{3}m\ell^2\cancel{\dot{\varphi}}\,\ddot{\varphi} = 0$

$\ddot{\varphi} + \frac{15g}{14\ell}\varphi = 0$

d) $\omega_0^2 = \frac{15g}{14\ell} \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{15g}{14\ell}}$

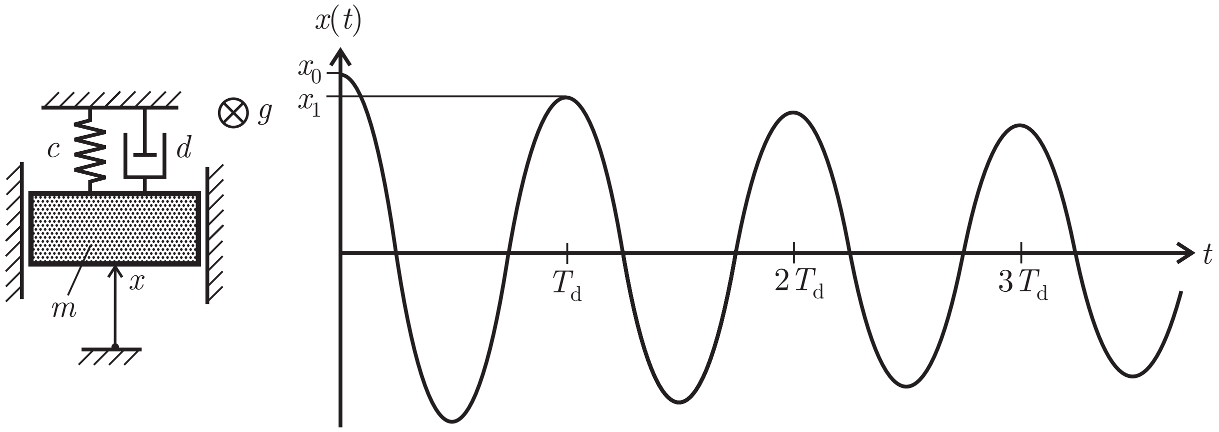
Tipps und Tricks

- Beim Herleiten der Bewegungsgleichung eines konservativen Systems aus dem Energieerhaltungssatz sollten die Geschwindigkeitsgrößen herausfallen!
- Die Lage des Nullniveaus zur Berechnung des Schwerepotentials ist beliebig, da eine Konstante U_0 beim Ableiten nach der Zeit herausfällt!
- Die Ersetzungen $\sin\varphi \approx \varphi$ und $\cos\varphi \approx 1$ bei kleinen Schwingungen erst nach der zeitlichen Ableitung durchführen!
- Wie bei allen Aufgaben empfiehlt sich - spätestens beim Endergebnis - eine Einheitenkontrolle. Hier: $[\omega] = \sqrt{\frac{\text{m}}{\text{s}^2\text{m}}} = \frac{1}{\text{s}}$.

Musterlösungen (ohne Gewähr)

Frage 4

Das skizzierte schwach gedämpfte ($D \ll 1$) Feder-Dämpfer-Masse-System (Federkonstante c, Dämpfungskonstante d, Masse m) wird aus der Ruhelage $x = x_0$ stoßfrei losgelassen. Es stellt sich der gegebene Verlauf der Auslenkung $x(t)$ ein. Das erste Maximum x_1 nach der Periodendauer T_d beträgt nur noch das $\mathrm{e}^{-\frac{1}{10}}$-fache von x_0.



a) Wie groß ist der Dämpfungskonstante d?

b) Wie groß ist die Schwingungsamplitude x_5 nach fünf Schwingungsperioden?

<u>Gegeben:</u> $c = 400\pi^2\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$, $m = 1$ kg, x_0, $x_1 = x_0\mathrm{e}^{-\frac{1}{10}}$.

$d =$

$x_5 =$

Lösung

a) Logarithmisches Dekrement $\Lambda = \ln\left(\frac{q_0}{q_1}\right) = \ln\left(\frac{q_0}{q_0\mathrm{e}^{-\frac{1}{10}}}\right) = \ln\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{10}}\right) = \frac{1}{10}$

$$D \approx \frac{\Lambda}{2\pi} = \frac{1}{20\pi} = \frac{d}{2\sqrt{cm}} \rightarrow d = \frac{1}{10\pi}\sqrt{cm} = 2\ \frac{\mathrm{Ns}}{\mathrm{m}}$$

b) $\Lambda = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{x_1}{x_{1+n}}\right) = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{x_0}{x_n}\right) \rightarrow x_5 = x_0\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{10}}\right)^5 = x_0\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$

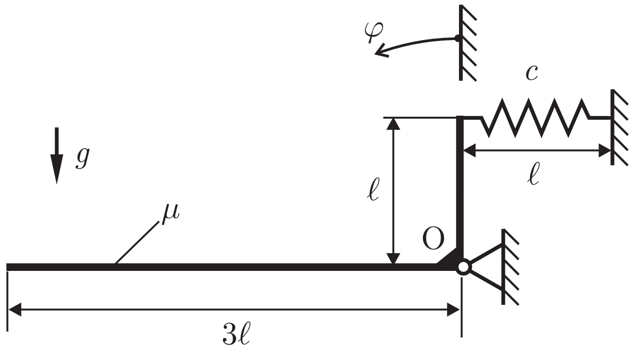
Tipps und Tricks

Bei Anwendung der Formeln für das logarithmische Dekrement auf die richtige Indizierung achten. Λ bezeichnet den natürlichen Logarithmus des Verhältnisses zweier aufeinander folgender Maxima!

Musterlösungen (ohne Gewähr)

Frage 5

Ein homogener starrer Winkel (Länge der Schenkel ℓ bzw. 3ℓ, Massenbelegung μ) ist wie skizziert im Punkt O drehbar gelagert und am Ende des kurzen Schenkels über eine Feder (Federkonstante c) mit der Umgebung gekoppelt. Er ist in der skizzierten Lage $\varphi = 0$ im statischen Gleichgewicht. Die Feder ist bei einer Federlänge von $\ell/2$ entspannt.



a) Wie groß ist die Federkonstante c?

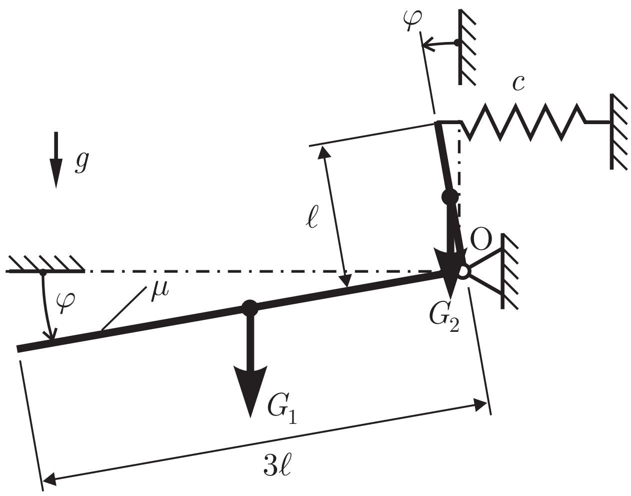
b) Geben Sie das Massenträgheitsmoment des Winkels bezüglich des Lagerpunktes O an!

c) Bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenz ω_0 für kleine Schwingungen!

Gegeben: ℓ, m, $\mu = m/\ell$, g.

$c =$	$J^{(\mathrm{O})} =$	$\omega_0 =$

Lösung



Musterlösungen (ohne Gewähr)

a) Momentensumme um O:

$$\sum M^{(\mathrm{O})} = 0 = \frac{3}{2}\ell \cdot 3\ell\mu g - \ell F_{\mathrm{C}} = \frac{9}{2}mg\ell - \ell c\left(\ell - \frac{\ell}{2}\right) \rightarrow c = \frac{\frac{9}{2}mg\ell}{\frac{1}{2}\ell^2} = 9\frac{mg}{\ell}$$

b) $J^{(\mathrm{O})} = \frac{1}{3} \cdot 3m(3\ell)^2 + \frac{1}{3}m\ell^2 = \frac{28}{3}m\ell^2$

c) Differentialgleichung ($\varphi \ll 1 \rightarrow \sin\varphi \approx \varphi, \cos\varphi \approx 1$):

$$J^{(\mathrm{O})}\ddot{\varphi} + c\ell^2\varphi - mg\frac{\ell}{2}\varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{3c}{28m} - \frac{3g}{56\ell}\right)\varphi = 0$$

Gleichgewichtslage $\varphi = 0$ wird instabil, wenn $c < \frac{mg}{2\ell}$ (hier nicht der Fall, $c = 9\frac{mg}{\ell}$)!

$$\ddot{\varphi} + \underbrace{\frac{51g}{56\ell}}_{\omega_0^2}\varphi = 0 \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{51g}{56\ell}}$$

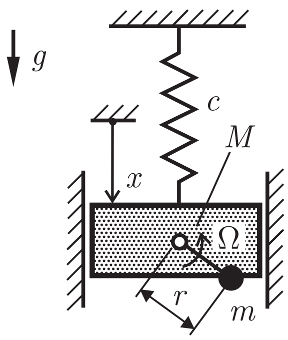
Tipps und Tricks

Der Anteil $G_1 = 3mg$ der Gewichtskraft bewirkt aufgrund der Annahme kleiner Schwingungen kein rückstellendes dynamisches Moment, da sich die dynamische Änderung des Hebelarmes in der ausgelenkten Lage aus $3/2\ell \cdot (1 - \cos\varphi)$ ergibt. Mit $\cos\varphi \approx 1$ wird diese Änderung bei kleinen φ zu Null. Das statische Moment $3/2\ G_1\ell$ der Gewichtskraft G_1 wird bereits durch die entsprechend vorgespannte Feder kompensiert. Der Anteil $G_2 = mg$ hingegen greift am Hebelarm $\ell/2 \cdot \sin\varphi \approx \varphi\ell/2$ an. Die hieraus resultierende Rückstellkraft muss daher in der Bewegungsgleichung zusätzlich zur dynamischen Federkraft berücksichtigt werden!

Musterlösungen (ohne Gewähr)

Frage 6

Der skizzierte Schwinger (Masse m, Federsteifigkei c) wird durch die mit konstanter Kreisfrequenz Ω umlaufende Unwuchtmasse m (Unwuchtradius r) zu Schwingungen angeregt. Er befindet sich im eingeschwungenen Zustand.



Für welche Kreisfrequenzen $\Omega = \Omega_1$ und $\Omega = \Omega_2$ entspricht die Schwingungsamplitude $\hat{x} = r/2$?

Gegeben: r, m, $M = 3m$, c.

$\Omega_1 =$ $\qquad\qquad$, $\Omega_2 =$

Lösung

Partikulärlösung für unwuchterregten Schwinger:

$$\hat{x}_{\text{part}}(t) = \frac{m}{M+m} r \underbrace{\frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}}_{V_1(\eta)} = \frac{1}{4} r V_1(\eta) \overset{!}{=} \frac{1}{2} r \rightarrow V_1(\eta) \overset{!}{=} 2$$

Mit $D = 0$:

$$V_1(\eta) = 2 = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2}} \rightarrow 2\sqrt{(1-\eta^2)^2} = \eta^2 \rightarrow 4((1-\eta^2)^2) = \eta^4 \rightarrow 2(1-\eta^2) = \pm\eta^2$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{M+m}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{m}}$$

$$\eta_1^2 = \frac{2}{3} \rightarrow \eta_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \rightarrow \Omega_1 = \eta_1 \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{6m}}$$

$$\eta_2^2 = 2 \rightarrow \eta_2 = \sqrt{2} \rightarrow \Omega_2 = \eta_2 \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{2m}}$$

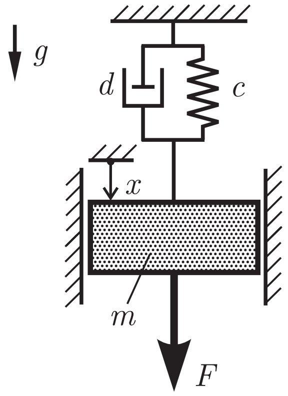
Tipps und Tricks

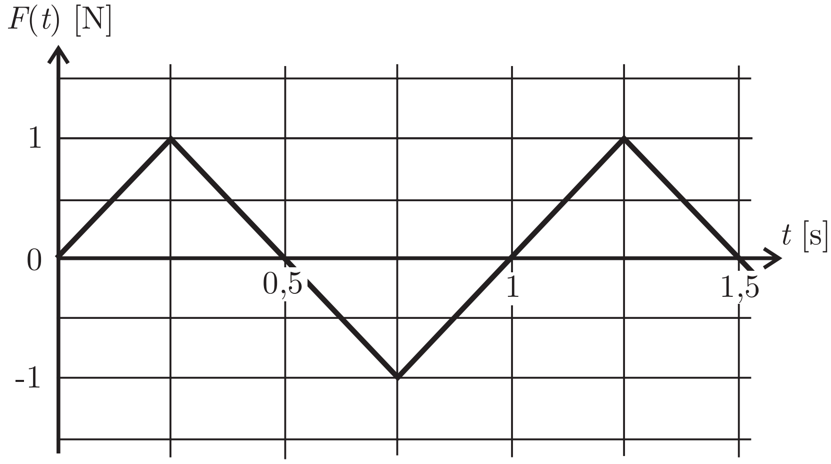
- Lösungen qualitativ in der Verläufen der Vergrößerungsfunktionen überprüfen!
- Beim Auflösen der Gleichungen auf die Wurzelbildung und die damit verbundenen positiven und negativen Vorzeichen achten. Je nach geforderter Amplitude bzw. gefordertem Wert der Vergrößerungsfunktion sind keine, eine oder zwei reelle Lösungen für das Frequenzverhältnis η möglich!
- Auf richtige Eigenkreisfrequenz ω_0 achten! Die Unwuchtmasse schwingt mit!

Musterlösungen (ohne Gewähr)

Frage 7

Der skizzierte Schwinger wird mit der dargestellten periodischen Kraft $F(t)$ angeregt. Er befindet sich im eingeschwungenen Zustand.





a) Wie lautet die Fourierreihenentwicklung von $F(t)$?

b) Schwingungsanteile welcher Kreisfrequenzen Ω_i sind in der Schwingungsantwort $x(t)$ enthalten?

c) In welchem Verhältnis $\hat{x}_1/\hat{x}_2$ treten die beiden niedrigsten Frequenzanteile mit Ω_1 und Ω_2 in der Schwingungsantwort $x(t)$ auf?

Gegeben: $m = 1$ kg, $c = 4\pi^2 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$, $d = 4\pi\ \frac{\mathrm{Ns}}{\mathrm{m}}$.

Hinweis: Brechen Sie die Fourierreihe nach dem zweiten nicht-konstanten Glied ab!

$F(t) =$

$\Omega_1 =$, $\Omega_2 =$	$\hat{x}_1/\hat{x}_2 =$

Musterlösungen (ohne Gewähr)

Lösung

a) $T_{\text{Err}} = 1 \text{ s} \rightarrow \Omega = \dfrac{2\pi}{T_{\text{Err}}} = 2\pi \text{ s}^{-1}$

$$F(t) = \frac{8}{\pi^2}\text{N}\left(\sin(\Omega t) - \frac{1}{9}\sin(3\Omega t) + \ldots\right)$$

b) $\Omega_1 = \Omega, \quad \Omega_2 = 3\Omega$

c) $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{c}{m}} = 2\pi \text{ s}^{-1} \rightarrow \eta_1 = \dfrac{\Omega_1}{\omega_0} = 1,\ \eta_2 = \dfrac{\Omega_2}{\omega_0} = 3$

$$D = \frac{d}{2\sqrt{cm}} = 1$$

$$V_3(\eta_1) = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta_1^2)^2 + (2D\eta_1)^2}} = \frac{1}{2D} = \frac{1}{2}$$

$$V_3(\eta_2) = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta_2^2)^2 + (2D\eta_2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{64+36}} = \frac{1}{10}$$

$$\rightarrow \frac{\hat{x}_1}{\hat{x}_2} = \frac{V_3(\eta_1)}{\frac{1}{9}V_3(\eta_2)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{10}} = 45$$

Tipps und Tricks

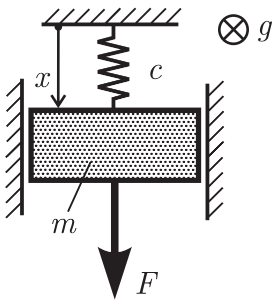
- Vorfaktoren der einzelnen Glieder aufgrund der Fourierreihenentwicklung nicht vergessen!

- Auf richtigen Vorfaktor aufgrund der angegebenen Amplitude achten! Der Faktor $4/\pi$ würde hier einen Maximalwert von $\hat{F} = \pi/2$ N bedeuten (siehe Formelsammlung). Um den Maximalwert $\hat{F} = 1$ N zu erhalten, muss entsprechend zusätzlich der Faktor $2/\pi$ berücksichtigt werden, sodass sich als Vorfaktor $8/\pi^2$ ergibt.

Musterlösungen (ohne Gewähr)

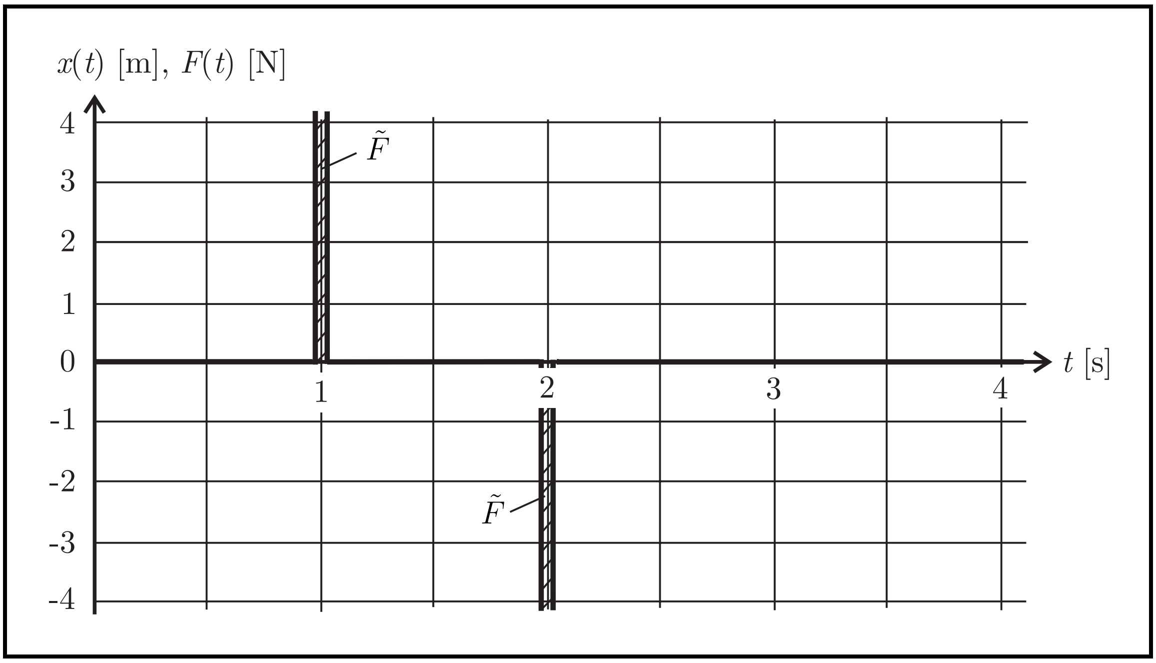
Frage 8

Das skizzierte Feder-Masse-System (Federkonstante c, Masse m) wird in der Ruhelage durch die Kraft $F(t)$ zu Schwingungen angeregt. Der Kraftverlauf $F(t)$ besteht wie skizziert aus zwei idealen Kraftstößen zu den Zeitpunkten $t_1 = 1$ s bzw. $t_2 = 2$ s, jeweils mit dem Flächeninhalt $F(t)\mathrm{d}t = \tilde{F} = 4\pi$ Ns.



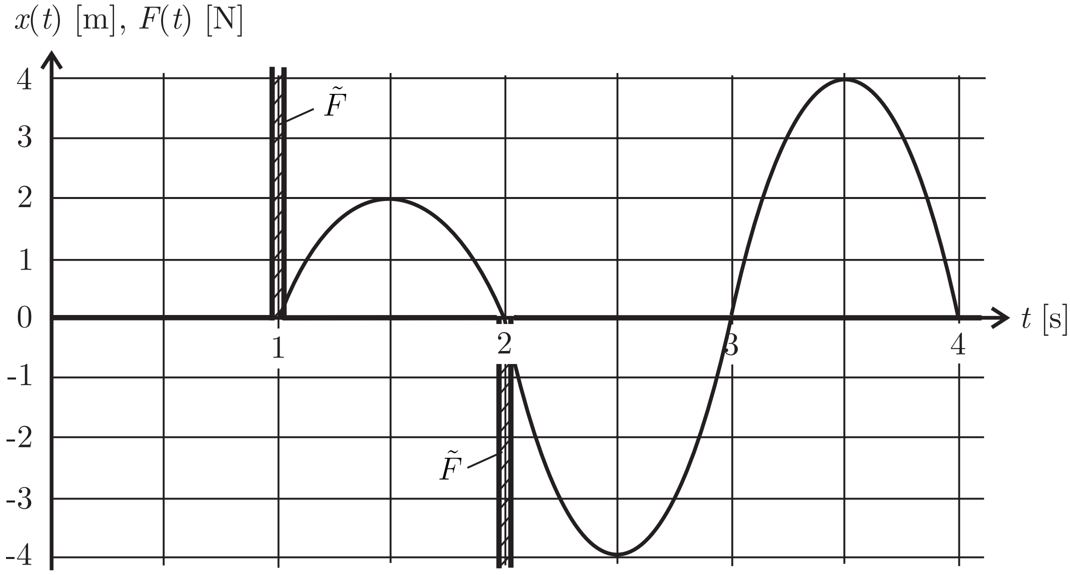
Zeichnen Sie den Verlauf der Schwingungsantwort $x(t)$ in das gegebene Diagramm ein!

Gegeben: $c = 2\pi^2$ N/m, $m = 2$ kg, $F(t)$.



Musterlösungen (ohne Gewähr)

Lösung



$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{2\pi^2 \text{ N/m}}{2 \text{ kg}}} = \pi \text{ s}^{-1} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2 \text{ s}$$

System ist ungedämpft $\rightarrow$ Stoßantwortfunktion $q_{\text{St}} = \sin \omega_0 t$

Geschwindigkeit nach dem ersten Stoß aus Impulssatz:

$$m\dot{x}_+ = \int F(t)\mathrm{d}t = \tilde{F} \rightarrow \dot{x}_+ = \frac{\tilde{F}}{m} = \frac{4\pi \text{ Ns}}{2 \text{ kg}} = 2\pi \text{ m/s}$$

Amplitude der harmonischen Schwingung $\hat{x} = \frac{\hat{\dot{x}}}{\omega_0} = \frac{2\pi \text{ m/s}}{\pi \text{ s}^{-1}} = 2 \text{ m}$

Tipps und Tricks

- Ein Kraftstoß an der Masse m führt zu einer Änderung des Impulses und somit zu einer Änderung der Geschwindigkeit!
- Der zweite Stoß gleichen Flächeninhaltes in entgegengesetzter Richtung führt - je nach Zeitpunkt - zu einer teilweisen oder vollständigen Kompensation oder aber auch Vergrößerung der Schwingungsamplitude. Hier: Verdoppelung, da gerade nach $T/2$ aufgebracht.

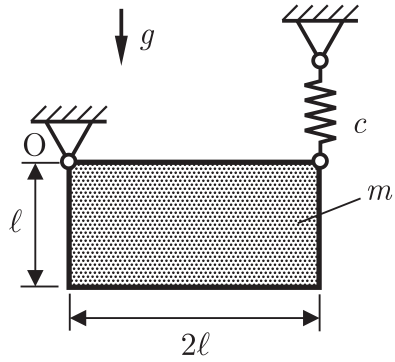
Musterlösungen (ohne Gewähr)

Aufgabe 9

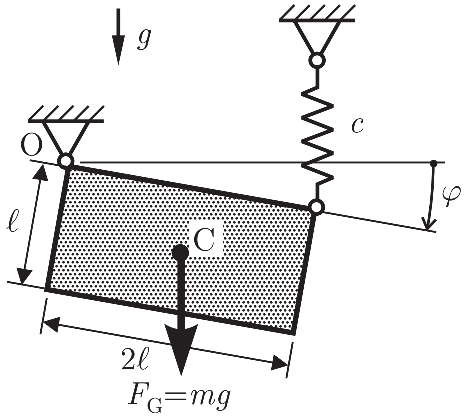
Eine homogene Rechteckplatte (Breite 2ℓ, Höhe ℓ, Masse m) ist drehbar in O gelagert und befindet sich in der gezeichneten horizontalen Stellung im statischen Gleichgewicht.

Bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenz ω_0 für kleine Schwingungen um die Gleichgewichtslage!

<u>Gegeben:</u> ℓ, m, c, g.



Lösung



Ausführliche Rechenwege:
Ausgangspunkt: entspannte Feder, Federlängung in der Gleichgewichtslage: $\Delta\ell_0 = \dfrac{mg}{2c}$

Massenträgheitsmoment: $J^{(\mathrm{O})} = \underbrace{\dfrac{1}{12}m\left(\ell^2+(2\ell)^2\right)}_{J^{(\mathrm{C})}} + \underbrace{m\left(\left(\dfrac{\ell}{2}\right)^2+\ell^2\right)}_{\text{Steiner-Anteil}} = \dfrac{5}{3}m\ell^2$

<u>Alternative I: Drallsatz um O</u>

$$J^{(\mathrm{O})}\ddot{\varphi} = -c\cdot\underbrace{2\ell\cos\varphi}_{\text{Hebelarm}}\cdot\underbrace{(\cancel{\Delta\ell_0}+2\ell\sin\varphi)}_{\text{Längenänderung der Feder aus entspannter Lage}} + mg\underbrace{\left(\cancel{\ell\cos\varphi}-\frac{\ell}{2}\sin\varphi\right)}_{\text{horizontale Lage von C}}$$

(Kompensation von Feder- und Gewichtskraft in der Gleichgewichtslage)

$$J^{(\mathrm{O})}\ddot{\varphi} + \left(4c\ell^2\cos\varphi + \frac{mg\ell}{2}\right)\sin\varphi = 0$$

Annahme: kleine Schwingungen $\rightarrow \sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1$

Musterlösungen (ohne Gewähr)

$$J^{(\mathrm{O})}\ddot{\varphi} + \left(4c\ell^2 + \frac{mg\ell}{2}\right)\varphi = 0 \rightarrow \ddot{\varphi} + \underbrace{\left(\frac{12c}{5m} + \frac{3g}{10\ell}\right)}_{\omega_0^2}\varphi = 0$$

Eigenkreisfrequenz: $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{12c}{5m} + \dfrac{3g}{10\ell}}$

<u>Alternative II: Energieerhaltungssatz</u>

Energieerhaltungssatz: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(U+T) = 0$

potentielle Energie der Feder: $U_{\mathrm{F}} = \dfrac{1}{2}c\left(\Delta\ell_0 + 2\ell\sin\varphi\right)^2$

potentielle Energie der Platte: $U_{\mathrm{P}} = -mgh$

mit $h = \ell\sin\varphi + \dfrac{\ell}{2}\cos\varphi$ (vertikale Lage des Schwerpunktes C)

kinetische Energie der Platte: $T = \dfrac{1}{2}J^{(\mathrm{O})}\dot{\varphi}^2$

Gesamtenergie: $E = U + T = \dfrac{1}{2}c(\Delta\ell_0 + 2\ell\sin\varphi)^2 - mg\ell\left(\sin\varphi + \dfrac{1}{2}\cos\varphi\right) + \dfrac{1}{2}J^{(\mathrm{O})}\dot{\varphi}^2$

Ableitung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(U+T) \overset{!}{=} 0 = c\left(\cancel{\Delta\ell_0} + 2\ell\sin\varphi\right)\cdot 2\ell\cos\varphi\,\cancel{\dot{\varphi}} - mg\ell\left(\cancel{\cos\varphi}\,\cancel{\dot{\varphi}} - \frac{1}{2}\sin\varphi\,\cancel{\dot{\varphi}}\right) + J^{(\mathrm{O})}\ddot{\varphi}\,\cancel{\dot{\varphi}}$$

Auch hier kann die Federlängung aufgrund der Kräfte / Momente in der Gleichgewichtslage herausgekürzt werden.

$$\rightarrow J^{(\mathrm{O})}\ddot{\varphi} + \left(4c\ell^2\cos\varphi + \frac{mg\ell}{2}\right)\sin\varphi = 0 \text{ (siehe oben)}$$

Tipps und Tricks

- Aufgrund der Linearität des Systems bei kleinen Schwingungen um die Gleichgewichtslage $\varphi = 0$ werden zur Ermittlung der Bewegungsgleichung nur die dynamischen Anteile benötigt!
- Der horizontale Abstand ℓ des Schwerpunktes vom Drehpunkt hat keinen Einfluss auf den Hebelarm, an dem F_{G} angreift, solange kleine Schwingungen vorausgesetzt werden. Der vertikale Abstand $\ell/2$ bewirkt aber mit dem Winkel φ (genau: mit $\sin\varphi$) eine Verschiebung des Schwerpunktes nach links. Er muss daher im Drallsatz berücksichtigt werden!
- Beim Herleiten der Bewegungsgleichung eines konservativen Systems aus dem Energieerhaltungssatz sollten die Geschwindigkeitsgrößen herausfallen!

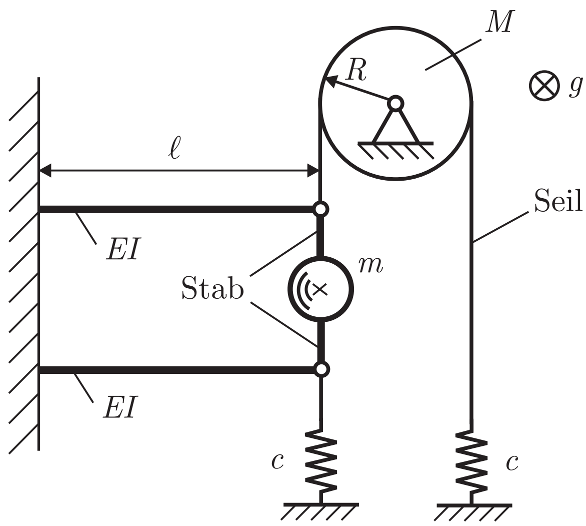
Musterlösungen (ohne Gewähr)

Aufgabe 10

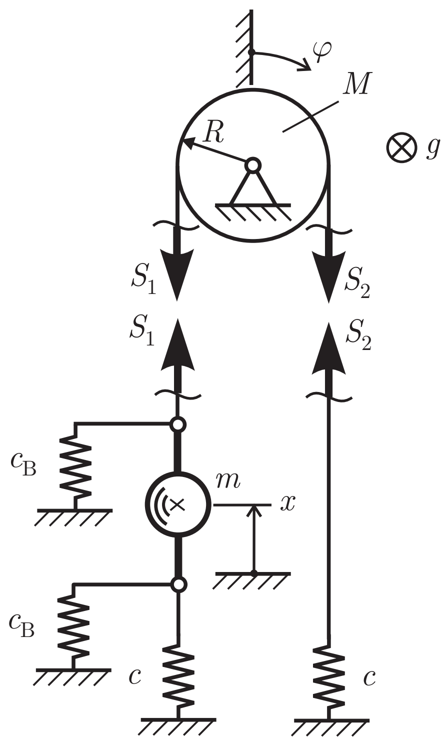
Eine Punktmasse m wird über einen masselosen starren Stab und ein undehnbares, durch zwei Federn (Federkonstante jeweils c) vorgespanntes Seil über eine Umlenkrolle (Radius R, Masse M) gehalten. Die Enden des Stabes sind zusätzlich wie skizziert an zwei masselosen Balken (jeweils Länge ℓ, Biegesteifigkeit EI) befestigt. Zwischen Seil und Rolle tritt kein Schlupf auf.

Bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenz ω_0 des Systems!

Gegeben: R, ℓ, m, M, EI, c.



Lösung



Ersatzfederkonstante c_B eines Balkens: $c_B = \dfrac{3EI}{\ell^3}$

Impulssatz Masse: $m\ddot{x} = -(c + c_B)x - c_B x + S_1 \rightarrow m\ddot{x} = -(2c_B + c)x + S_1 \rightarrow S_1 = m\ddot{x} + (2c_B + c)x$

Drallsatz: $J\ddot{\varphi} = R(S_2 - S_1)$

Seilkraft $S_2 = -cR\varphi$

(Dies ist eine *dynamische* Seilkraft, die negativ werden kann, wenn eine ausreichend große Vorspan-

Musterlösungen (ohne Gewähr)

nung vorhanden ist, die verhindert, dass das Seil auf Druck beansprucht werden müsste.)
Kinematik: $\dot{x} = R\dot{\varphi}$
aus Drallsatz: $\frac{1}{2}MR^2\ddot{\varphi} = R(-cR\varphi - mR\ddot{\varphi} - (2c_\mathrm{B} + c)R\varphi)$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{2}M + m\right)\cancel{R^2}\ddot{\varphi} + 2\,(c + c_\mathrm{B})\cancel{R^2}\varphi = 0 \rightarrow \ddot{\varphi} + \underbrace{2\frac{c + c_\mathrm{B}}{\frac{1}{2}M + m}}_{\omega_0^2}\varphi = 0 \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{4c + 12\frac{EI}{\ell^3}}{M + 2m}}$$

<u>Lösungsweg mit Vorspannkraft $\bar{S}$ im Seil</u>
(statische Größen mit $\bar{(.)}$ gekennzeichnet - nicht zeitabhängig, da Konstanten!):

Verschiebung der Masse m aus der Lage der entspannten Federn:
$x_\mathrm{ges} = x + \bar{x}$ (dynamischer und statischer Anteil)
Seilkräfte $S_{i,\mathrm{ges}} = S_i + \bar{S}$ (dynamischer und statischer Anteil)

Vorspannkraft $\bar{S} = (2c_\mathrm{B} + c)\bar{x}$

eingesetzt in Impulssatz:
$m\ddot{x}_\mathrm{ges} = -(2c_\mathrm{B} + c)x_\mathrm{ges} + S_{1,\mathrm{ges}}$

$$m(\ddot{x} + \overset{0}{\cancel{\ddot{\bar{x}}}}) = -(2c_\mathrm{B} + c)(x + \bar{x}) + S_1 + \bar{S} = -(2c_\mathrm{B} + c)(x + \cancel{\bar{x}}) + S_1 + \cancel{(2c_\mathrm{B} + c)\bar{x}} = -(2c_\mathrm{B} + c)x + S_1$$
$\rightarrow m\ddot{x} = -(2c_\mathrm{B} + c)x + S_1$

Im Drallsatz ändert sich nichts, da eine Vorspannkraft auf beiden Seiten der Umlenkrolle auftritt. Die gesamte Seilkraft $S_{2,\mathrm{ges}} = S_2 + \bar{S}$ ergibt sich aus einer Längung $y_\mathrm{ges} = y + \bar{y}$ der rechten Feder gegenüber ihrer entspannten Lage. Das statische $\bar{y}$ ergibt sich aus $\bar{y} = \bar{S}/c$ und entspricht *nicht* $\bar{x}$, da in diesem Strang zwar die gleiche Federvorspannkraft $\bar{S}$, aber eine andere Federkonstante wirkt. Die statische Längenänderung kann z.B. erreicht werden, indem der rechte Lagerpunkt nach unten versetzt wird, oder aber das Seil zunächst kürzer war als in der Skizze dargestellt. Die dynamische Längenänderung entspricht $y = -R\varphi = -x$, da diese eine Verkürzung der Feder bewirkt. Für die Seilkraft gilt dann

$$S_{2,\mathrm{ges}} = S_2 + \bar{S} = cy_\mathrm{ges} = c(y + \bar{y}) = c\left(-R\varphi + \frac{\bar{S}}{c}\right) = -cR\varphi + \bar{S}$$
$\rightarrow S_2 = -cR\varphi.$

Die Gleichungen sind somit völlig identisch, da sich der statische Anteil bei der zweiten Vorgehensweise herauskürzt und nur der dynamische Anteil relevant ist.

Musterlösungen (ohne Gewähr)

Tipps und Tricks

Seilkräfte können keine Druckkräfte aufnehmen! Aus diesem Grunde muss das Seil vorgespannt sein, damit eine Oszillation der Seilkräfte durch die Schwingung der Masse nicht zu Druckkräften führt. Die dynamischen Anteile können hingegen negativ sein. Solange die Schwingungsamplituden klein sind bzw. die Vorspannkraft ausreichend groß ist, wird das Seil jedoch weiterhin auf Zug beansprucht.

Formulierungen wie *'kein Schlupf'*, *'rutschfreies Abrollen'*, *'rollt ohne zu rutschen'* usw. → Anwenden der Rollbedingung (kinematische Kopplung zwischen den Koordinaten)!

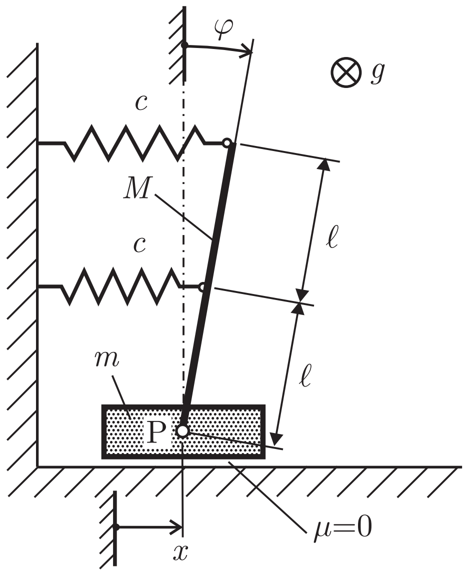
Musterlösungen (ohne Gewähr)

Aufgabe 11

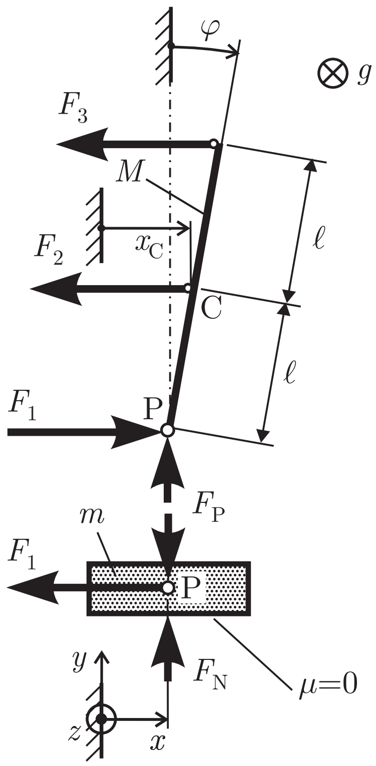
Ein homogener starrer Stab (Länge 2ℓ, Masse M) ist im Punkt P drehbar in der Mitte eines Quaders (Masse m) gelagert und über zwei Federn (Federkonstante jeweils c) wie skizziert mit der Umgebung gekoppelt. Die Federn sind für $x = 0$ und $\varphi = 0$ entspannt. Das System ist reibungsfrei.

Geben Sie die Bewegungsgleichungen für kleine Schwingungen in Matrizenschreibweise an!

Gegeben: ℓ, m, $M = 3m$, c.



Lösung



Kinematik: $\dot{x}_C = \dot{x} + \ell\dot{\varphi}$ (Annahme kleiner Schwingungen: $\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1$)

Massenträgheitsmoment: $J^{(C)} = \dfrac{1}{12}M(2\ell)^2 = m\ell^2$ bzw. $J^{(P)} = \dfrac{1}{3}M(2\ell)^2 = 4m\ell^2$

Musterlösungen (ohne Gewähr)

Federkraft $F_2 = c(x + \ell\varphi)$, Federkraft $F_3 = c(x + 2\ell\varphi)$

Impulssatz Quader: $m\ddot{x} = -F_1$ (1)

Impulssatz Stab: $M\ddot{x}_\mathrm{C} = F_1 - F_2 - F_3$ (2)

Drallsatz Stab um Punkt C: $J^{(\mathrm{C})}\ddot{\varphi} = -\ell(F_1 + F_3)$ (3)

Wichtig: Hier muss eigentlich auch das Moment der Vertikalkraft F_P berücksichtigt werden! Zur Berechnung dieser muss zusätzlich der Impulssatz $m\ddot{y}_\mathrm{C} = F_\mathrm{P}$ für den Stab in Vertikal-(y)-Richtung angeschrieben werden. Aus $y_\mathrm{C} = \ell\cos\varphi$ folgt die Beschleunigung $\ddot{y}_\mathrm{C} = -\ell(\sin\varphi\ \ddot{\varphi} + \cos\varphi\ \dot{\varphi}^2)$, die aber nur Terme 2. Ordnung enthält, sodass $\ddot{y}_\mathrm{C} \approx 0$ und damit auch $F_\mathrm{P} \approx 0$ gilt.

Mit Kinematik und Federkräften: 3 Gleichungen, 3 Unbekannte (F_1, x, φ):

aus (2): $F_1 = M\ddot{x}_\mathrm{C} + F_2 + F_3 = M\ddot{x} + M\ell\ddot{\varphi} + c(2x + 3\ell\varphi)$

in (1): $m\ddot{x} + M\ddot{x} + M\ell\ddot{\varphi} + 2cx + 3c\ell\varphi = 0$

in (3): $m\ell^2\ddot{\varphi} + M\ell\ddot{x} + M\ell^2\ddot{\varphi} + c\ell(2x + 3\ell\varphi) + c\ell x + 2c\ell^2\varphi = 0$

Zusammengefasst und in Matrizenform:

$$\begin{bmatrix} 4m & 3m\ell \\ 3m\ell & 4m\ell^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c & 3c\ell \\ 3c\ell & 5c\ell^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Alternative zum Drallsatz Stab um C: Drallsatz Stab um P:

$-J^{(\mathrm{P})}\ddot{\varphi} + (\vec{r}_\mathrm{PC} \times M\vec{a}_\mathrm{P}) \cdot \vec{e}_z = F_2\ell + 2F_3\ell = 3c\ell x + 5c\ell^2\varphi$

$\vec{r}_\mathrm{PC} = \ell \begin{bmatrix} \sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{a}_\mathrm{P} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, z-Komponente vom Kreuzprodukt: $-3m\ell\cos\varphi\ \ddot{x} \approx -3m\ell\ddot{x}$

$\rightarrow -4m\ell^2\ddot{\varphi} - 3m\ell\ddot{x} = 3c\ell x + 5c\ell^2\varphi \rightarrow 4m\ell^2\ddot{\varphi} + 3m\ell\ddot{x} + 3c\ell x + 5c\ell^2\varphi = 0$ (siehe oben)

Alternative:
Herleitung mit Hilfe der Lagrange'schen Gleichungen 2. Art für konservative Systeme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\dot{q}_i}\right) - \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}q_i} + \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}q_i} = 0, \quad q_1 = x, \quad q_2 = \varphi$$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M(\dot{x} + \ell\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}M(2\ell)^2\dot{\varphi}^2$$

$$U = \frac{1}{2}c\left((x + \ell\varphi)^2 + (x + 2\ell\varphi)^2\right)$$

Musterlösungen (ohne Gewähr)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\dot{x}}\right) = m\ddot{x} + M(\ddot{x}+\ell\ddot{\varphi}) = 4m\ddot{x} + 3m\ell\ddot{\varphi};\ \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = 0;\ \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} = c\left(x+\ell\varphi+x+2\ell\varphi\right) = 2cx + 3c\ell\varphi$$

$$\rightarrow 4m\ddot{x} + 3m\ell\ddot{\varphi} + 2cx + 3c\ell\varphi = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\dot{\varphi}}\right) = M\ell(\ddot{x}+\ell\ddot{\varphi}) + \frac{1}{3}M\ell^2\ddot{\varphi};\ \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\varphi} = 0;\ \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\varphi} = c\ell\left(x+\ell\varphi+2(x+2\ell\varphi)\right) = 3c\ell x + 5c\ell^2\varphi$$

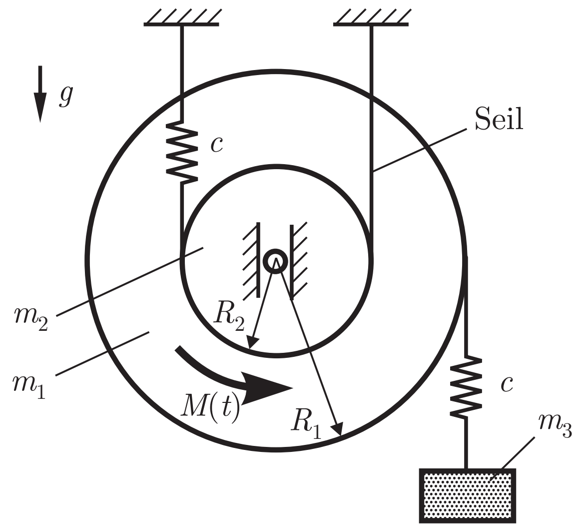
$$\rightarrow 3m\ell\ddot{x} + 4m\ell^2\ddot{\varphi} + 3c\ell x + 5c\ell^2\varphi = 0$$

Tipps und Tricks

- Die Erdbeschleunigung g wirkt hier senkrecht zur Zeichenebene und hat somit keinen Einfluss!
- Kontrolle: Beim Kreuzprodukt müssen die x- und y-Komponente verschwinden (ebenes Problem)!
- Vorsicht beim Drallsatz: Wenn der Bezugspunkt P nicht dem Schwerpunkt C entspricht und auch kein Fixpunkt ist verschwindet das Kreuzprodukt $\vec{r}_{\mathrm{PC}} \times m\vec{a}_{\mathrm{P}}$ nur in Sonderfällen!
- Bei Berechnung des Kreuzproduktes und Aufstellen des Drallsatzes auf Rechtshandsystem achten (hier x horizontal nach rechts, y vertikal nach oben, z aus Zeichenebene heraus. Drallsatz um z-Achse aufgestellt)!
- Zur Beschreibung können verschiedene Koordinaten gewählt werden. Das System hat zwei Freiheitsgrade, hier wurden x und φ gewählt. Möglich ist aber z.B. auch anstelle von φ die Lage des Stabschwerpunktes x_{C} oder die Relativkoordinate $x_{\mathrm{C}} - x$ wählbar. Dies wirkt sich dann auf die Struktur der Matrizen aus, die sich aber durch entsprechende Multiplikationen ineinander überführen lassen und identische Bewegungsgleichungen mit gleichen Eigenfrequenzen usw. darstellen.
- Impulssatz immer mit dem Schwerpunkt C aufstellen! Für den Stab wäre z.B. $M\ddot{x}_{\mathrm{P}} = F_1 - F_2 - F_3$ nicht korrekt!

Musterlösungen (ohne Gewähr)

Aufgabe 12



Zwei miteinander verbundene zylindrische Scheiben (Radius R_1, Masse m_1 bzw. Radius R_2, Masse m_2) sind über ein Seil und eine Feder (Federkonstante c) wie skizziert aufgehängt. Der Mittelpunkt der Scheiben kann in einer Führung vertikal reibungsfrei gleiten. An der großen Scheibe hängt über ein Seil und eine Feder (Federkonstante c) eine weitere Masse m_3. Die Seile sollen stets gespannt und undehnbar sein. Zwischen Seilen und Scheiben tritt kein Schlupf auf. Die Scheiben werden durch das Moment $M(t)$ angeregt.

a) Geben Sie die Bewegungsgleichungen in Matrizenschreibweise an!

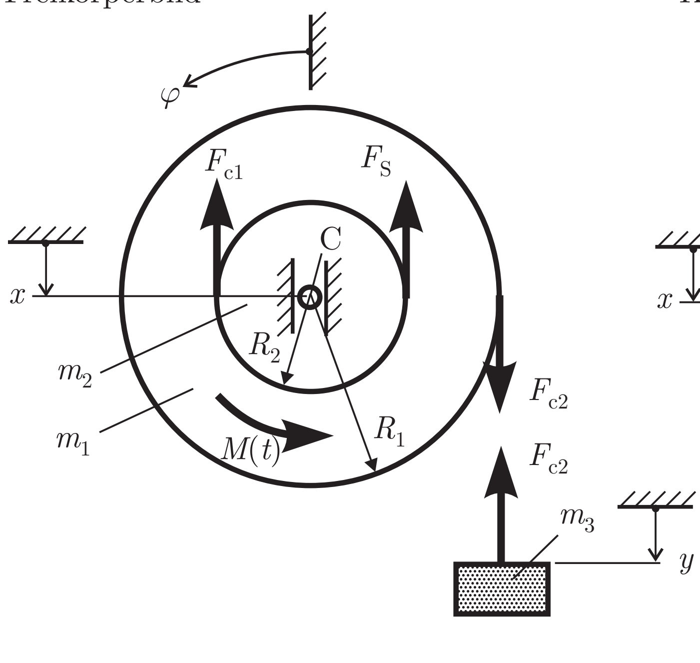
b) Bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenzen ω_i des Systems!

c) Für welches Ω bleiben die Scheiben in Ruhe?

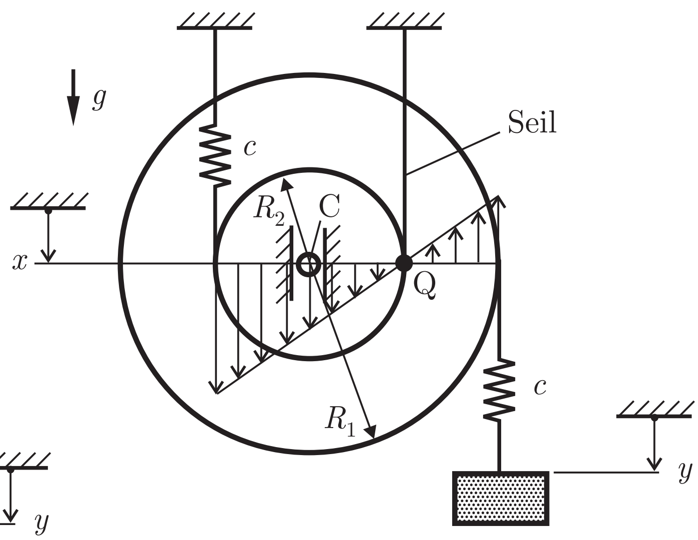
<u>Gegeben:</u> r, $R_1 = 2r$, $R_2 = r$, m, $m_1 = 4m$, $m_2 = 2m$, $m_3 = m$, $M(t) = M_0 \cos \Omega t$, c, g.

Lösung

Freikörperbild



Kinematik



Musterlösungen (ohne Gewähr)

a) Mittelpunkt M = Schwerpunkt C der Scheiben
Massenträgheitsmoment: $J^{(\mathrm{C})} = \frac{1}{2}m_1R_1^2 + \frac{1}{2}m_2R_2^2 = 9mr^2$
Federkräfte: $F_{\mathrm{c1}} = 2cx$, $F_{\mathrm{c2}} = c(x+y)$
Drallsatz Scheiben: $J^{(\mathrm{C})}\ddot{\varphi} = M - rF_{\mathrm{c1}} + rF_{\mathrm{S}} - 2rF_{\mathrm{c2}}$
Impulssatz Scheiben: $(m_1+m_2)\ddot{x} = -F_{\mathrm{c1}} - F_{\mathrm{S}} + F_{\mathrm{c2}}$
Kinematik: $\dot{\varphi} = \frac{\dot{x}}{r}$
Impulssatz Masse m_3: $m\ddot{y} = -F_{\mathrm{c2}}$
aus Impulssatz Scheiben: $F_{\mathrm{S}} = -F_{\mathrm{c1}} + F_{\mathrm{c2}} - (m_1+m_2)\ddot{x}$
in Drallsatz Scheiben eingesetzt: $9mr^2\frac{\ddot{x}}{r} = M - rF_{\mathrm{c1}} + r(-F_{\mathrm{c1}} + F_{\mathrm{c2}} - (m_1+m_2)\ddot{x}) - 2rF_{\mathrm{c2}}$

Federkräfte eingesetzt und sortiert: $\ddot{x} + \frac{1}{3}\frac{c}{m}x + \frac{1}{15}\frac{c}{m}y = \frac{M_0}{15mr}\cos\Omega t$ (1)
Impulssatz Masse m_3: $\ddot{y} + \frac{c}{m}y + \frac{c}{m}x = 0$ (2)

(1) und (2) zusammengefasst in Matrizenform:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix}}_{\ddot{\mathbf{q}}} + \underbrace{\frac{c}{m}\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{15} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Omega}^2} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{M_0}{15mr}\cos\Omega t \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}}$$

b) Vergleich mit Formelsammlung:
$\mathbf{\Omega}^2 = \begin{bmatrix} \omega_{\mathrm{I}}^2 & \gamma_{\mathrm{I}}^2 \\ \gamma_{\mathrm{II}}^2 & \omega_{\mathrm{II}}^2 \end{bmatrix}$
$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left(\omega_{\mathrm{I}}^2 + \omega_{\mathrm{II}}^2\right) \mp \sqrt{\frac{1}{4}(\omega_{\mathrm{I}}^2 - \omega_{\mathrm{II}}^2)^2 + \gamma_{\mathrm{I}}^2\gamma_{\mathrm{II}}^2}$
$\omega_{\mathrm{I}}^2 = \frac{c}{3m}$, $\omega_{\mathrm{II}}^2 = \frac{c}{m}$, $\gamma_{\mathrm{I}}^2 = \frac{c}{15m}$, $\gamma_{\mathrm{II}}^2 = \frac{c}{m}$ eingesetzt:

$\omega_1 = \sqrt{\left(\frac{2}{3} - \sqrt{\frac{8}{45}}\right)\frac{c}{m}}$, $\omega_2 = \sqrt{\left(\frac{2}{3} + \sqrt{\frac{8}{45}}\right)\frac{c}{m}}$

c) Tilgung, wenn $V_{\mathrm{I}} = 0 \rightarrow \omega_{\mathrm{II}}^2 = \Omega^2 \rightarrow \Omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$

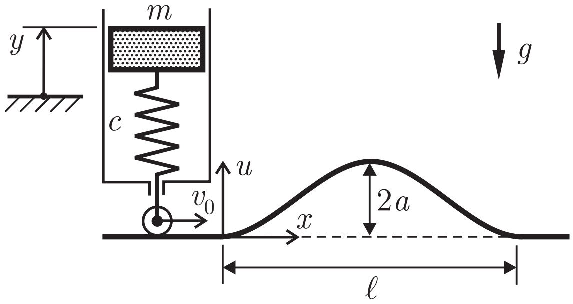
Musterlösungen (ohne Gewähr)

Tipps und Tricks

- Kinematik beachten: Bewegen sich die Scheiben um x nach unten, so bewegt sich der obere Endpunkt der rechten Feder um x nach oben, der untere Endpunkt der linken Feder um $2x$ nach unten. Hilfreich kann hier die Konstruktion des Momentanpols Q sein (kein Schlupf $\rightarrow$ Momentanpol im rechten Berührpunkt zum Seil).
- Zwischen x und y gibt es keine kinematische Zwangsbedingung. Dies sind zwei unabhängige Bewegungsmöglichkeiten (Freiheitsgrade)!
- Die Wahl der Koordinaten ist beliebig. Anstelle von x hätte z.B. auch φ gewählt werden können.
- Vorzeichen der Federkräfte aus Relativbewegung zwischen den Federendpunkten überprüfen! Hier z.B. an der rechten Feder: Annahme von F_{c2} als Zugkraft: sowohl positives x als auch positives y bewirken eine Zugkraft, Federkraft im Sinne der gewählten Koordinaten x und y sowie der Annahme der Richtung von F_{c2} im Freikörperbild daher $F_{c2} = c(x + y)$ (x und y 'verstärken' sich. Zeigen x und y an den Federendpunkten in die *gleiche* Richtung, so ist die *Differenz* aus x und y für die Federkraft entscheidend).
- Die Bedingung stets gespannter Seile muss erfüllt sein, da diese keine Druckkräfte aufnehmen können. Dies heißt, dass die Schwingungsamplituden nie so groß werden, dass die Vorspannkraft kompensiert wird und das Seil dann u.U. als Stab wirken müsste, um Druckkräfte aufzunehmen.
- Der Einfluss der Gewichtskräfte kann hier herausgelassen werden, da die Federkräfte im Gleichgewichtszustand gerade diese Gewichtskräfte kompensieren und nur der dynamische Anteil von x und y betrachtet wird! Die Erdbeschleunigung g taucht somit in der Lösung nicht auf, sie wird aber benötigt, damit die Vorspannung der Seile aufgrund der Gewichtskraft aufgebracht werden kann. Werden die Gewichtskräfte dennoch berücksichtigt, führt dies zu einer von Null verschiedenen rechten Seite der Differentialgleichung (konstante Störfunktion). Diese kann aber durch eine Koordinatentransformation auf die Gleichgewichtslage aufgrund der Linearität des Systems beseitigt werden.
- Die Verwendung des Energieerhaltungssatzes schlägt hier fehl, da die Energieerhaltung durch die zeitliche Ableitung *eine* Gleichung liefert, in der x und y bzw. deren zeitliche Ableitungen enthalten sind. Für ein Mehr-Freiheitsgradsystem erfolgt die Herleitung aus Energiebeziehungen dann mit den Lagrange'schen Gleichungen 2. Art.

Musterlösungen (ohne Gewähr)

Aufgabe 13



Die Federung eines Fahrzeuges wird durch ein Feder-Masse-System (Federkonstante c, Masse m) abgebildet und kann Vertikalschwingungen $y(t)$ ausführen. Das Fahrzeug fährt mit konstanter Geschwindigkeit $\dot{x} = v_0$ und erreicht zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Kuppe, deren Höhe durch die Funktion $u(x)$ beschrieben wird. Der Federfußpunkt folgt dem Profil der Fahrbahn.

a) Geben Sie die Schwingungsamplitude $y(t)$ für $0 < t \leq \ell/v_0$ für die Anfangsbedingungen $y(t = 0) = 0$ und $\dot{y}(t = 0) = 0$ an!

c) Mit welcher Amplitude schwingt das System *nach* Überfahren der Kuppe?

Gegeben: ℓ, a, c, m, g, $v_0 = \dfrac{\ell}{2\pi}\sqrt{\dfrac{c}{m}}$, $u(x) = \begin{cases} 0 \text{ für } x \leq 0 \\ a\,[1 - \cos(2\pi x/\ell)] \text{ für } 0 < x \leq \ell \\ 0 \text{ für } x > \ell \end{cases}$

Hinweis: $\displaystyle\int \sin\xi\cos\xi\;\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2}\sin^2\xi$, $\displaystyle\int \sin^2\xi\;\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2}(\xi - \sin\xi\cos\xi)$

Lösung

a) Differentialgleichung Federfußpunkterregung:

$m\ddot{y} + cy = cu$; normiert auf Eigenzeit $\tau = \omega_0 t$ mit $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$: $y'' + y = u(\tau)$

Bereich $0 < t \leq T$

Zeit der Überfahrt über die Kuppe: $x(t) = v_0 t \to T = \ell/v_0$

In Eigenzeit: $0 < \tau \leq \dfrac{\omega_0 \ell}{v_0} = \dfrac{\omega_0 \ell \cdot 2\pi}{\ell\omega_0} = 2\pi$

(v_0 wurde gerade so gewählt, dass die Überfahrtdauer der Periodendauer $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ der Eigenschwingung des Systems entspricht.)

$u(x) = a\,[1 - \cos(2\pi x/\ell)] \to u(t) = a\,[1 - \cos(2\pi v_0 t/\ell)]$

$\to u(\tau) = a\,[1 - \cos\tau] \to g(\xi) = a\,[1 - \cos\xi]$

Gesamtlösung: $y(\tau) = y_{\text{hom}}(\tau) + y_{\text{part}}(\tau)$

System ungedämpft: $\to y_{\text{hom}}(\tau) = A\cos\tau + B\sin\tau$, Sprungübergangsfunktion $q_{\text{Sp}}(\tau) = 1 - \cos\tau$

Musterlösungen (ohne Gewähr)

$$\begin{aligned}
y_{\text{part}}(\tau) &= \cancelto{0}{g(0)} q_{\text{Sp}}(\tau) + \int\limits_{\xi=0}^{\xi=\tau} \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\xi}\, q_{\text{Sp}}(\tau-\xi)\mathrm{d}\xi = \int\limits_{\xi=0}^{\xi=\tau} a\sin\xi\ \ (1-\cos(\tau-\xi))\,\mathrm{d}\xi \\
&= a\int\limits_{\xi=0}^{\xi=\tau} \sin\xi - \sin\xi\,(\cos\tau\cos\xi + \sin\tau\sin\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&= a\left[-\cos\xi - \cos\tau\frac{1}{2}\sin^2\xi - \sin\tau\frac{1}{2}(\xi - \sin\xi\cos\xi)\right]_{\xi=0}^{\xi=\tau} \\
&= a\left[\left(-\cos\tau - \cos\tau\frac{1}{2}\sin^2\tau - \sin\tau\frac{1}{2}(\tau-\sin\tau\cos\tau)\right) - \left(-1-0-\sin\tau\frac{1}{2}(0-0)\right)\right] \\
&= a\left[1-\cos\tau - \frac{1}{2}\tau\sin\tau\right]
\end{aligned}$$

$$y(\tau) = A\cos\tau + B\sin\tau + a\left[1-\cos\tau-\frac{1}{2}\tau\sin\tau\right]$$

$$y'(\tau) = -A\sin\tau + B\cos\tau + a\left[\sin\tau - \frac{1}{2}(\sin\tau+\tau\cos\tau)\right] = -A\sin\tau + B\cos\tau + a\left[\frac{1}{2}(\sin\tau-\tau\cos\tau)\right]$$

A, B aus Anfangsbedingungen $y(\tau=0)=0 \rightarrow A=0$, $y'(\tau=0)=0 \rightarrow B=0$

$$y(\tau) = a\left[1-\cos\tau-\frac{1}{2}\tau\sin\tau\right] \rightarrow y(t) = a\left[1-\cos(\omega_0 t) - \frac{1}{2}(\omega_0 t)\sin(\omega_0 t)\right]$$

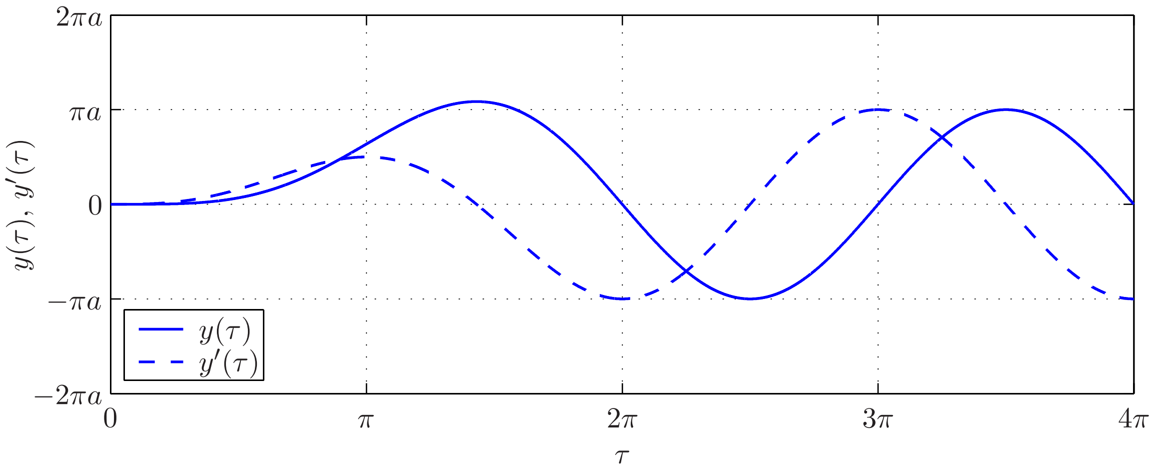
$$y'(\tau) = a\left[\frac{1}{2}(\sin\tau-\tau\cos\tau)\right] \rightarrow \dot{y}(t) = a\omega_0\left[\frac{1}{2}(\sin(\omega_0 t) - (\omega_0 t)\cos(\omega_0 t))\right]$$

b) Ende der Kuppe: $\tau = 2\pi$, anschließend freie harmonische Schwingungen mit $y(\tau) = C\cos\tau + D\sin\tau$, $y'(\tau) = -C\sin\tau + D\cos\tau$ und den Anfangsbedingungen zum Zeitpunkt $\tau = 2\pi$:
$y(\tau=2\pi)=0 \rightarrow C=0$, $y'(\tau=2\pi) = -\pi a \rightarrow D = -\pi a$

$$\tau > 2\pi : y(\tau) = \underbrace{-\pi a}_{\hat{y}=|-\pi a|=\pi a}\ \sin\tau$$

$$\text{Gesamtlösung: } y(\tau) = \begin{cases} 0 \text{ für } \tau \leq 0 \\ y(\tau) = a\left[1-\cos\tau-\frac{1}{2}\tau\sin\tau\right] \text{ für } 0 < \tau \leq 2\pi \\ -\pi a\sin\tau \text{ für } \tau > 2\pi \end{cases}$$

Musterlösungen (ohne Gewähr)



<u>Alternative:</u> $y_{\text{part}}(\tau)$ aus Gewichtsfunktion und Duhamel-Integral (Teilstöße)

$$\begin{aligned}
y_{\text{part}}(\tau) &= \int_{\xi=0}^{\xi=\tau} g(\xi)\ q_{\text{St}}(\tau-\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{\xi=0}^{\xi=\tau} a(1-\cos\xi)\ \sin(\tau-\xi)\mathrm{d}\xi \\
&= a\int_{\xi=0}^{\xi=\tau} \sin\tau\cos\xi - \cos\tau\sin\xi - \sin\tau\cos^2\xi + \cos\tau\sin\xi\cos\xi\mathrm{d}\xi \\
&= a\left[\sin\tau\sin\xi + \cos\tau\cos\xi - \sin\tau\frac{1}{2}(\xi+\sin\xi\cos\xi) + \cos\tau\frac{1}{2}\sin^2\xi\right]_{\xi=0}^{\xi=\tau} \\
&= a\left[\left(\sin^2\tau + \cos^2\tau - \frac{1}{2}\sin\tau(\tau+\sin\tau\cos\tau) + \frac{1}{2}\cos\tau\sin^2\tau\right) - (0+\cos\tau-0+0)\right] \\
&= a\left[1-\cos\tau-\frac{1}{2}\tau\sin\tau\right] \qquad \text{(siehe oben)}
\end{aligned}$$

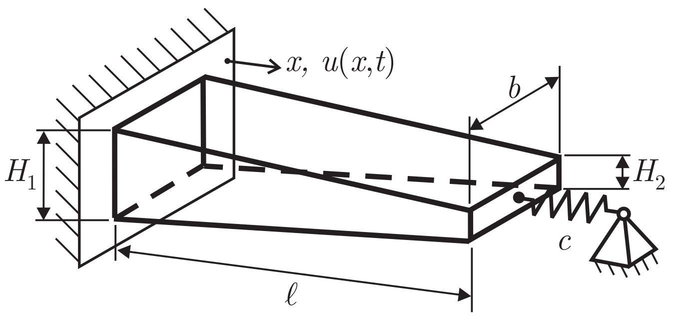
Tipps und Tricks

Das System wird nicht-periodisch angeregt, daher ist hier die Berechnung entweder über Teilsprünge oder über -stöße notwendig!

Musterlösungen (ohne Gewähr)

Aufgabe 14

Ein Stab mit rechteckiger Querschnittsfläche (konstante Breite b, linear abnehmende Höhe $h(x)$, Länge ℓ, Elastizitätsmodul E, Dichte ϱ) ist einseitig fest eingespannt. An seinem rechten Ende ist er über eine Feder (Federkonstante c) mit der Umgebung gekoppelt.



Bestimmen Sie mit dem einfachsten zulässigen Polynomansatz eine obere Schranke für die erste Eigenkreisfrequenz ω_1 für Längsschwingungen des Stabes!

Gegeben: ℓ, b, H, $H_1 = 3H$, $H_2 = H$, E, ϱ, c.

Lösung

Rayleigh-Quotient $\omega_1^2 \leq \dfrac{E_{\text{pot,Stab}} + E_{\text{pot,Feder}}}{E^*_{\text{kin,Stab}}}$

Ansatz: $\tilde{U}(x) = ax$ (zulässig, da wesentliche (geometrische) Randbedingung $\tilde{U}(x=0) = 0$ erfüllt ist)

Querschnittsfläche $A(x) = b\left(H_1 - (H_1 - H_2)\dfrac{x}{\ell}\right) = b\left(3H - 2\dfrac{H}{\ell}x\right)$

$$E_{\text{pot,Stab}} = \frac{1}{2}\int\limits_{x=0}^{x=\ell} EA(x)\tilde{U}'^2(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}Ea^2\int\limits_{x=0}^{x=\ell} A(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}Ea^2 b\left[3Hx - \frac{H}{\ell}x^2\right]_0^{\ell} = Ea^2bH\ell$$

$$E_{\text{pot,Feder}} = \frac{1}{2}c\tilde{U}^2(x=\ell) = \frac{1}{2}ca^2\ell^2$$

$$E^*_{\text{kin,Stab}} = \frac{1}{2}\int\limits_{x=0}^{x=\ell} \varrho A(x)\tilde{U}^2(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\varrho a^2\int\limits_{x=0}^{x=\ell} A(x)x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\varrho a^2 b\left[Hx^3 - \frac{H}{2\ell}x^4\right]_0^{\ell} = \frac{1}{4}\varrho a^2bH\ell^3$$

$$\rightarrow \omega_1^2 \leq \frac{E\cancel{a^2}bH\cancel{\ell} + \frac{1}{2}c\cancel{a^2}\cancel{\ell^2}}{\frac{1}{4}\varrho\cancel{a^2}bH\cancel{\ell^3}^{\,2}} = \frac{EbH + \frac{1}{2}c\ell}{\frac{1}{4}\varrho bH\ell^2} = \frac{4EbH + 2c\ell}{\varrho bH\ell^2} \rightarrow \omega_1 \leq \sqrt{\frac{4EbH + 2c\ell}{\varrho bH\ell^2}}$$

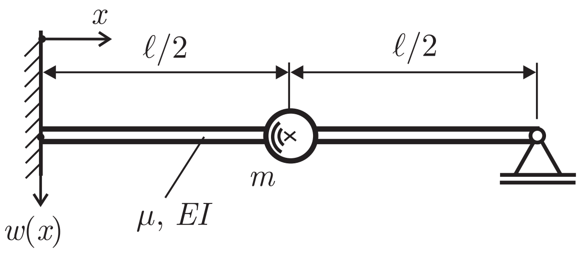
Tipps und Tricks

- Die Integrale für den Stab sind über den Argumenten $EA\tilde{U}'^2$ bzw. $\varrho A\tilde{U}^2$ zu bilden, wobei grundsätzlich alle Größen von der Koordinate x abhängig sein *können*!
- Der konstante Vorfaktor a im Ansatz $\tilde{U}(x)$ muss sich im Rayleigh-Quotienten herauskürzen lassen (Probe)!

Musterlösungen (ohne Gewähr)

Aufgabe 15

Ein homogener Balken (Länge ℓ, Biegesteifigkeit EI, Massenbelegung μ) mit konstanter Querschnittsfläche ist wie skizziert gelagert. Er trägt bei $x = \ell/2$ eine zusätzliche Punktmasse m.



a) Bestimmen Sie mit dem Polynomansatz $\tilde{W}(x) = a\left(x^2 - \frac{1}{\ell}x^3\right)$ eine obere Schranke und

b) mit Hilfe des Satzes von Dunkerley eine untere Schranke für die erste Eigenkreisfrequenz ω_1 für Biegeschwingungen des Balkens!

<u>Gegeben:</u> ℓ, m, $\mu = 10m/\ell$, EI.

Lösung

a) Rayleigh-Quotient: $\omega_1^2 \leq \dfrac{E_{\text{pot,Balken}}}{E^*_{\text{kin,Balken}} + E^*_{\text{kin,Masse}}}$

Ansatz: $\tilde{W}(x) = a\left(x^2 - \frac{1}{\ell}x^3\right) \to \tilde{W}'(x) = a\left(2x - \frac{3}{\ell}x^2\right) \to \tilde{W}''(x) = a\left(2 - \frac{6}{\ell}x\right)$

$$\begin{aligned}
E_{\text{pot,Balken}} &= \frac{1}{2}\int\limits_{x=0}^{x=\ell} EI\tilde{W}''^2(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}EIa^2\int\limits_{x=0}^{x=\ell}\left(2 - \frac{6}{\ell}x\right)^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}EIa^2\left[-\frac{\ell}{18}\left(2-\frac{6}{\ell}x\right)^3\right]_0^\ell \\
&= -\frac{EIa^2\ell}{36}[-64-8] = 2EIa^2\ell \\
E^*_{\text{kin,Balken}} &= \frac{1}{2}\int\limits_{x=0}^{x=\ell}\varrho A\tilde{W}^2(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\varrho Aa^2\int\limits_{x=0}^{x=\ell}\left(x^2 - \frac{1}{\ell}x^3\right)^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\varrho Aa^2\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3\ell}x^6 + \frac{1}{7\ell^2}x^7\right]_0^\ell \\
&= \frac{1}{2}\varrho Aa^2\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{7}\right]\ell^5 = \frac{1}{2}\varrho Aa^2\frac{1}{105}\ell^5 = \frac{1}{210}\varrho Aa^2\ell^5 = \frac{1}{210}\mu a^2\ell^5 \\
E^*_{\text{kin,Masse}} &= \frac{1}{2}m\tilde{W}^2(x=\ell/2) = \frac{1}{2}ma^2\frac{\ell^4}{64} = \frac{1}{128}ma^2\ell^4
\end{aligned}$$

$$\to \omega_1^2 \leq \frac{2EI\cancel{a^2}\cancel{\ell}}{\frac{1}{210}\mu\cancel{a^2}\cancel{\ell^5}^{\,4} + \frac{1}{128}m\cancel{a^2}\cancel{\ell^4}^{\,3}} = \frac{2}{\frac{1}{21}+\frac{1}{128}}\frac{EI}{m\ell^3} \approx 36,08\frac{EI}{m\ell^3} \to \omega_1 \leq 6,007\sqrt{\frac{EI}{m\ell^3}}$$

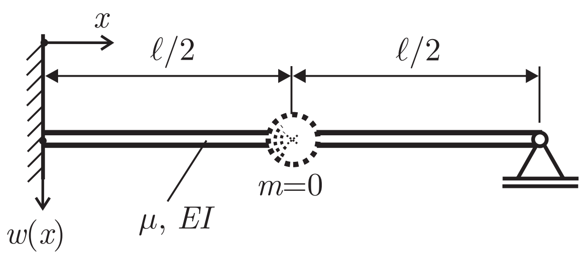
Anmerkung: Die Abschätzung ist mit dem gewählten Ansatz noch recht ungenau. Man versuche auch den Ansatz $\tilde{W} = a\left(x^2 - \frac{5}{3\ell}x^3 + \frac{2}{3\ell^2}x^4\right)$, der der statischen Durchsenkung des skizzierten

Musterlösungen (ohne Gewähr)

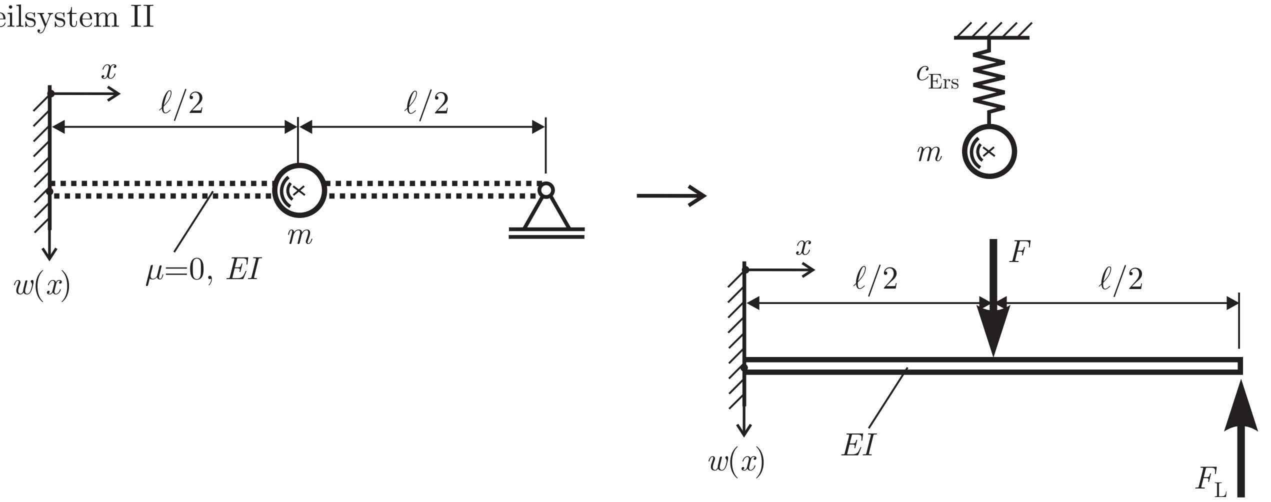
Balkens unter Eigengewicht entspricht (sehr gute Approximation der ersten Eigenform des Balkens ohne Zusatzmasse!) und letztlich mit $\omega_1 \leq 4,45\sqrt{\frac{EI}{m\ell^3}}$ eine deutlich genauere Abschätzung liefert.

b) Dunkerley: $\omega_1^2 \geq \frac{1}{D^*}$, $D^* = \sum_i \frac{1}{\omega_{1,i}^2}$

Teilsystem I



Teilsystem II



<u>Teilsystem I (Balken ohne Zusatzmasse)</u>

exakte Eigenkreisfrequenz (Randbedingungen eingespannt - gestützt): $\omega_{1,\mathrm{I}}^2 = (2\pi \cdot 2,454)^2 \, \frac{EI}{\mu\ell^4}$

Mit $\mu = 10m/\ell$: $\omega_{1,\mathrm{I}}^2 \approx 23,77\frac{EI}{m\ell^3}$

<u>Teilsystem II (Masse m an masselosem Balken)</u>

Ersatzfederkonstante des Balkens
(nicht unmittelbar aus tabellierten Biegelinen ablesbar, da System statisch überbestimmt!):

$$w(\ell) \stackrel{!}{=} 0 = \frac{F\ell^3}{24EI} + \underbrace{\frac{F\ell^2}{8EI}}_{\text{Neigung bei } x=\frac{\ell}{2}} \cdot\frac{\ell}{2} - \frac{F_\mathrm{L}\ell^3}{3EI} \rightarrow F_\mathrm{L} = \frac{5}{16}F$$

Musterlösungen (ohne Gewähr)

$$w(\ell/2) = \frac{F\ell^3}{24EI} - \frac{F_\mathrm{L}}{6EI}\ell\left(\frac{\ell}{2}\right)^2\left(3-\frac{1}{2}\right) = \frac{F\ell^3}{EI}\left(\frac{1}{24}-\frac{25}{16\cdot 48}\right) \rightarrow c_\mathrm{Ers} = \frac{F}{w(\ell/2)} = \frac{16\cdot 48}{7}\frac{EI}{\ell^3}$$

exakte Eigenkreisfrequenz (Feder-Masse-System): $\omega_{1,\mathrm{II}}^2 = \dfrac{c_\mathrm{Ers}}{m} = \dfrac{16\cdot 48}{7}\dfrac{EI}{m\ell^3} \approx 109,71\dfrac{EI}{m\ell^3}$

$$D^* = 0,0511\frac{m\ell^3}{EI} \rightarrow \omega_1 \geq 4,42\sqrt{\frac{EI}{m\ell^3}}$$

Tipps und Tricks

- Der konstante Vorfaktor a im Ansatz $\tilde{W}(x)$ muss sich im Rayleigh-Quotienten herauskürzen lassen (Probe)!
- Zahlenwerte nicht ausrechnen, sie dienen hier nur der Veranschaulichung!