**Musterlösungen (ohne Gewähr)**

**Frage 1 ( $\approx$ 2 Punkte)**

Bei einer Messung ist ein harmonisches Geschwindigkeitssignal $v(t) = \hat{v}\cos(\omega t + \varphi_0)$ aufgezeichnet worden.

a) Wie groß ist die komplexe Amplitude $\underline{\hat{v}}$ der Geschwindigkeit bei Verwendung der komplexen Schreibweise $v(t) = \mathrm{Re}\left[\underline{\hat{v}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]$?

b) Geben Sie den zugehörigen Weg $x(t)$ an!

Gegeben: $\hat{v}$, $\omega$, $\varphi_0$.

$\underline{\hat{v}} =$

$x(t) =$

**Lösung**

a)

$$\boxed{\underline{\hat{v}} = \hat{v}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_0}}$$

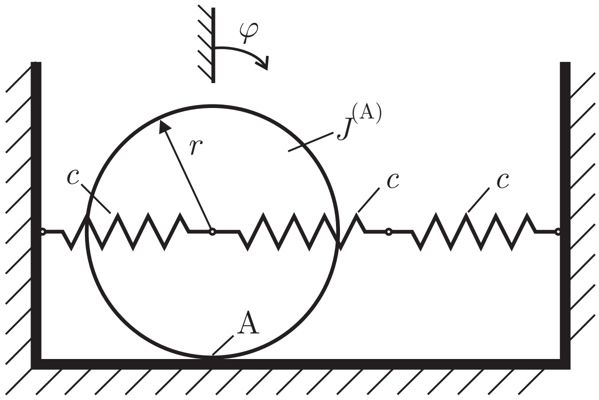
b)

$$\boxed{x(t) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\underline{\hat{v}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right] = \frac{\hat{v}}{\omega}\sin\left(\omega t + \varphi_0\right)}$$

**Musterlösungen (ohne Gewähr)**

**Frage 2 (≈ 2 Punkte)**

Gegeben ist die Anordnung aus einer Rolle (Radius $r$, Massenträgheitsmoment $J^{(A)}$), die über drei Federn (Federkonstante $c$) an die Wände gekoppelt ist. Die Rolle rollt ohne zu rutschen. Die Lage des Systems wird durch die verallgemeinerte Koordinate $\varphi$ beschrieben. Für $\varphi = 0$ sind die Federn entspannt.




a) Geben Sie die Bewegungsgleichung für kleine Bewegungen um die Ruhelage an!

b) Bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenz $\omega_0$ der Anordnung!

Gegeben: $r$, $J^{(A)}$, $c$.

Bewegungsgleichung:

$\omega_0 =$

**Lösung**

a)

$$J^{(A)} \cdot \ddot{\varphi} + \frac{3}{2} c \cdot r^2 \cdot \varphi = 0$$

b)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3cr^2}{2J^{(A)}}}$$

**Musterlösungen (ohne Gewähr)**

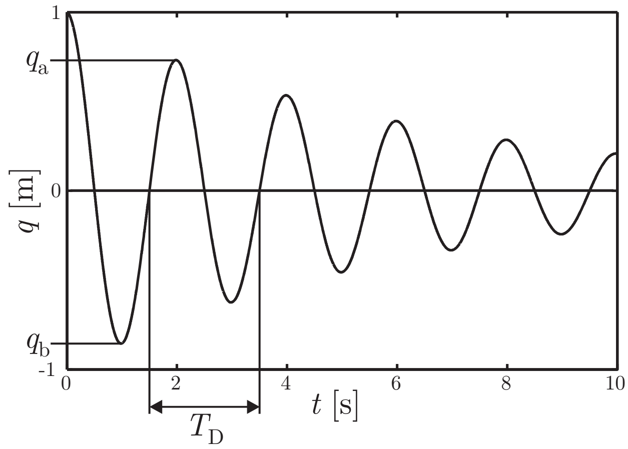
**Frage 3 ($\approx$ 3 Punkte)**

Ein ungedämpftes System hat die Periodendauer $T_0$. Nach Einbau eines Dämpfers hat das gedämpfte System den Dämpfungsgrad $D$. Es wird ein Ausschwingversuch mit den Anfangsbedingungen $q(0) = 1\,\mathrm{m}$ und $\dot{q}(0) = 0$ durchgeführt.

Berechnen Sie die Extremwerte $q_\mathrm{a}$ und $q_\mathrm{b}$ sowie die Periodendauer $T_\mathrm{D}$!

Hinweis: Der skizzierte Schwingungsverlauf ist nicht maßstabsgetreu! Es gilt $D \ll 1$.

Gegeben: $T_0 = 2\,\mathrm{s}$, $D$, $q(0) = 1\,\mathrm{m}$, $\dot{q}(0) = 0$.




| | | |
|---|---|---|
| $q_\mathrm{a} =$ | $q_\mathrm{b} =$ | $T_\mathrm{D} =$ |

**Lösung**

**Musterlösungen (ohne Gewähr)**

$$\Lambda = \ln\left(\frac{1\mathrm{m}}{q_\mathrm{a}}\right) \Rightarrow q_\mathrm{a} = \mathrm{e}^{-\Lambda}\mathrm{m} \Rightarrow$$

$$\boxed{q_\mathrm{a} = \mathrm{e}^{-2\pi\frac{D}{\sqrt{1-D^2}}}\mathrm{m} \approx \mathrm{e}^{-2\pi D}\mathrm{m}}$$

$$\Lambda = 2\ln\left(\frac{1\mathrm{m}}{q_\mathrm{b}}\right) \Rightarrow q_\mathrm{b} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\Lambda}\mathrm{m} \Rightarrow$$

$$\boxed{q_\mathrm{b} = \mathrm{e}^{-\pi\frac{D}{\sqrt{1-D^2}}}\mathrm{m} \approx \mathrm{e}^{-\pi D}\mathrm{m}}$$

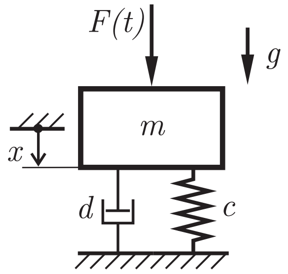
$$\omega_\mathrm{D} = \omega_0\sqrt{1-D^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{T_\mathrm{D} = \frac{T_0}{\sqrt{1-D^2}} = \frac{2\mathrm{s}}{\sqrt{1-D^2}} \approx 2\mathrm{s}}$$

**Musterlösungen (ohne Gewähr)**

**Frage 4 ($\approx$ 2 Punkte)**

Gegeben ist ein Feder-Masse-Dämpfer-System, das mit einer harmonischen Kraft $F(t)$ beaufschlagt wird. Für das Frequenzverhältnis $\eta = 1$ gilt für die Vergrößerungsfunktion $V(\eta = 1) = 2$.




a) Wie groß ist der Dämpfungsgrad $D$?

b) Welcher Wert ergibt sich für die Vergrößerungsfunktion bei $\eta = 2$?

Gegeben: $V(\eta = 1) = 2$.

$D =$

$V(\eta = 2) =$

**Lösung**

a) $V_3(\eta) = \dfrac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}} \Rightarrow V_3(\eta = 1) = \dfrac{1}{2D} = 2 \Rightarrow$

$$\boxed{D = \frac{1}{4}}$$

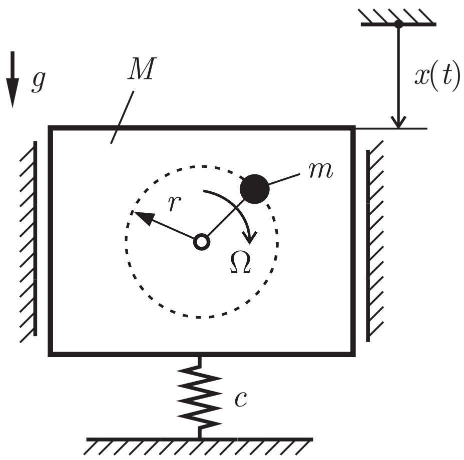
b)

$$\boxed{V_3(\eta = 2) = \frac{1}{\sqrt{(1-2^2)^2 + (\frac{2\cdot 2}{4})^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}}$$

**Musterlösungen (ohne Gewähr)**

**Frage 5 ($\approx$ 3 Punkte)**

Ein durch Unwucht erregter Körper (Unwuchtmasse $m$, Masse ohne Unwucht $M$) ist wie skizziert federnd gelagert. Bei der Erregerkreisfrequenz $\Omega_1$ wird eine harmonische Schwingung mit der Amplitude $\hat{x}_1$ gemessen. Die Federkonstante $c$ ist nicht bekannt.




a) Geben Sie die Schwingungsamplitude $\hat{x}(\eta)$ als Funktion des Frequenzverhältnisses $\eta$ an!

b) Welchen Wert nimmt die Vergrößerungsfunktion $V$ bei der Erregerkreisfrequenz $\Omega = \Omega_1$ an?

c) Berechnen Sie die Eigenkreisfrequenz $\omega_0$ des Systems!

Gegeben: $M$, $m = \frac{1}{2}M$, $r$, $\hat{x}_1 = \frac{1}{4}r$, $\Omega_1$, $g$.

$\hat{x}(\eta) =$

$V(\Omega_1) =$

$\omega_0 =$

**Lösung**

a) Lösung nach F.S. Fall 7 (Unwuchterregung): $V(\eta) = \dfrac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}} \Rightarrow$

$$\boxed{\hat{x}(\eta) = x_0 \kappa V(\eta) = \frac{r}{3}\frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2}}}$$

**Musterlösungen (ohne Gewähr)**

b) $\eta_1 = \dfrac{\Omega_1}{\omega_0} \qquad \hat{x}(\eta_1) = x_0 \kappa V(\eta_1) = \dfrac{1}{3} r V(\eta_1) = \dfrac{1}{4} r \Rightarrow$

$$\boxed{V(\Omega_1) = \frac{3}{4}}$$

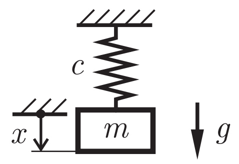
c) $V(\eta_1) = \dfrac{\eta_1^2}{\sqrt{(1-\eta_1^2)^2}} = \dfrac{3}{4}$ (unterkritisch) $\Rightarrow \eta_1^2 = \dfrac{3}{4}\left(1-\eta_1^2\right) \Rightarrow \eta_1 = \sqrt{\dfrac{3}{7}} \Rightarrow$

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{7}{3}}\Omega_1}$$

**Musterlösungen (ohne Gewähr)**

**Frage 6 ($\approx$ 3 Punkte)**

Das dargestellte System befindet sich vor dem Zeitpunkt $t = 0$ in Ruhe ($x(t < 0) = 0$). Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird ein idealer Stoß in positiver $x$-Richtung aufgegeben, der zu einer Schwingung mit der Amplitude 1 m führt.

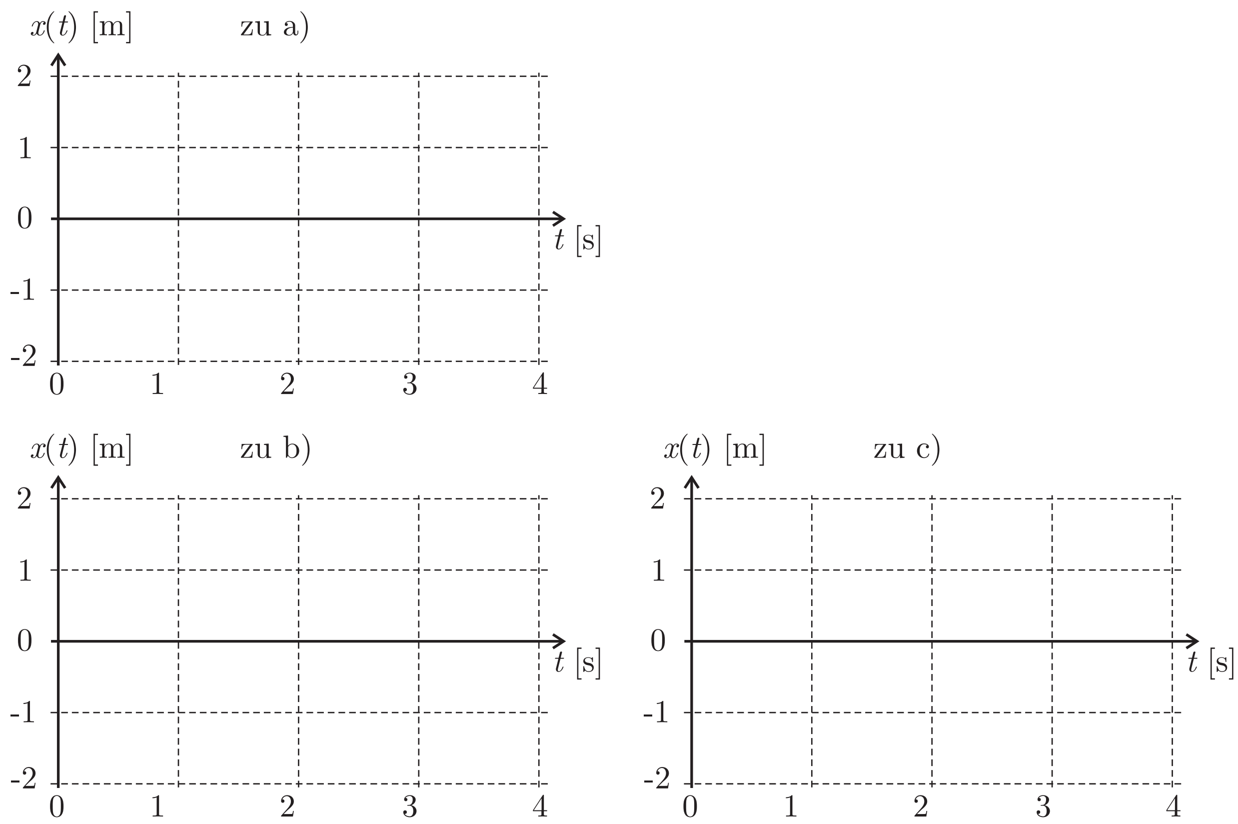



a) Zeichnen Sie den Schwingungsverlauf $x(t)$ nach der Stoßanregung!

b) Zum Zeitpunkt $t_1 = 2\,\mathrm{s}$ wird der gleiche Stoß ein zweites Mal aufgebracht. Zeichnen Sie den gesamten Schwingungsverlauf $x(t)$!

c) Nun wird der zweite Stoß zum Zeitpunkt $t_2 = 3\,\mathrm{s}$ aufgebracht. Zeichnen Sie den gesamten Schwingungsverlauf $x(t)$!

<u>Gegeben:</u> $m = 4\,\mathrm{kg}$, $c = 4\pi^2\,\mathrm{N/m}$.



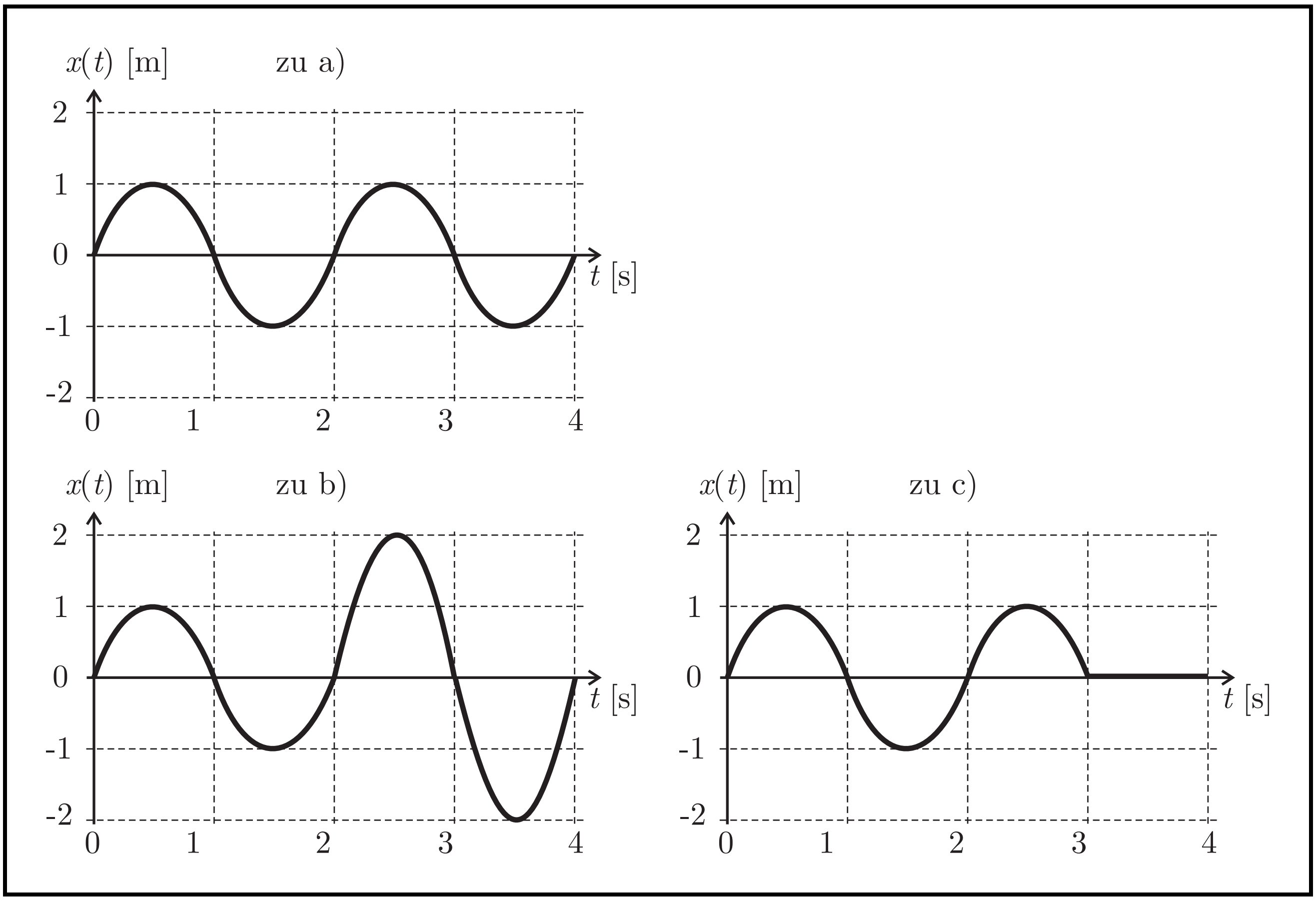

**Lösung**

**Musterlösungen (ohne Gewähr)**

a) $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{c}{m}} = \sqrt{\dfrac{4\pi^2}{4\mathrm{s}^2}} = \dfrac{\pi}{\mathrm{s}} \Longrightarrow f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = \dfrac{1}{2s} \Longrightarrow T_0 = 2s$

b)

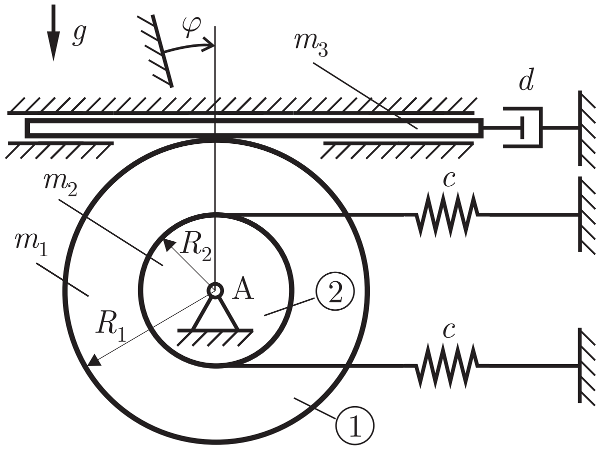
c)



**Musterlösungen (ohne Gewähr)**

**Aufgabe 7 ($\approx$ 7 Punkte)**

Das skizzierte schwingungsfähige System besteht aus zwei fest miteinander verbundenen homogenen Zylindern, die im Punkt A reibungsfrei gelagert sind. Auf dem Zylinder 1 rollt eine reibungsfrei geführte Stange ohne zu rutschen ab. Sie ist über einen Dämpfer mit der Umgebung verbunden. Zylinder 2 ist von einem masselosen, undehnbaren Seil umschlungen, dessen Enden jeweils über eine Feder mit der Umgebung verbunden sind. Die Federn sind so vorgespannt, dass das Seil stets gespannt ist. In einem Ausschwingversuch wurde ermittelt, dass die Amplitude $\hat{\varphi}$ nach 6 Schwingungsperioden von $\hat{\varphi}_1$ auf $\hat{\varphi}_7$ abgeklungen ist.




a) Geben Sie die Bewegungsgleichung des Systems in Abhängigkeit der Koordinate $\varphi$ an!

b) Berechnen Sie die Eigenkreisfrequenz $\omega_0$ des ungedämpften Systems!

c) Berechnen Sie die Dämpfungskonstante $d$ und die Eigenkreisfrequenz $\omega_\mathrm{d}$ des gedämpften Systems!

Gegeben: $R$, $R_1 = 2R$, $R_2 = R$, $\hat{\varphi}_1$, $\hat{\varphi}_7 = \hat{\varphi}_1 \mathrm{e}^{-0,6}$, $m$, $m_1 = m_2 = 8m_3 = m$, $c$, $g$.

**Lösung**

a) .
Drallsatz des reduzierten Systems um den Punkt A:

$$J^A_{red}\,\ddot{\varphi} = -dR_1^2\dot{\varphi} - 2cR_2^2\varphi$$

Bestimmen der Feder- und Dämpferkräfte. Umstellen und Einsetzen von $R_1$ und $R_2$ liefert die Bewegungsgleichung:

$$J^A_{red}\,\ddot{\varphi} + 4dR^2\dot{\varphi} + 2cR^2\varphi = 0$$

Berechung des reduzierten Massenträgheitsmoments $J^A_{red}$:

$$J^A_{red} = \frac{1}{2}m_1R_1^2 + \frac{1}{2}m_2R_2^2 + m_3R_1^2$$

**Musterlösungen (ohne Gewähr)**

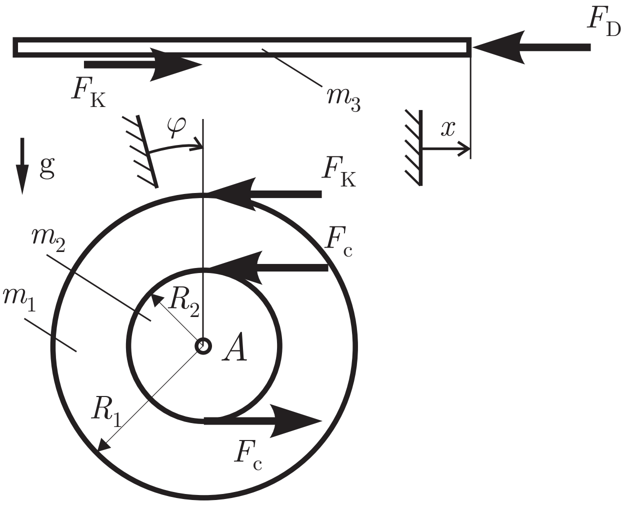
Einsetzen von $R_1$, $R_2$ sowie $m_1$, $m_2$ und $m_3$ führt auf:

$$J_{red}^A = \frac{1}{2}m(2R)^2 + \frac{1}{2}mR^2 + \frac{1}{8}m(2R)^2 = 3mR^2$$

Die Bewegungsgleichung lautet somit:

$$\ddot{\varphi} + \frac{4}{3}\frac{d}{m}\dot{\varphi} + \frac{2}{3}\frac{c}{m}\varphi = 0$$

Alternativer Lösungsweg über Drall- und Schwerpunktsatz der freigeschnittenen Teilsysteme:




Kinematik:

$$\dot{x} = R_1\dot{\varphi} = 2R\dot{\varphi}$$

Schwerpunktsatz der Stange:

$$m_3\ddot{x} = F_K - F_D$$

$$m_3\ddot{x} + d\dot{x} = F_K$$

Anwenden der Kinematischen Zwangsbedingung und Einsetzen von $m_3$ führt auf:

$$\frac{1}{4}mR\ddot{\varphi} + 2dR\dot{\varphi} = F_K$$

Drallsatz des Doppelzylinders um A:

$$J^A\ddot{\varphi} = -2R_2F_c - R_1F_K$$

$$J^A\ddot{\varphi} + 2RF_K + 2RF_c = 0$$

**Musterlösungen (ohne Gewähr)**

Berechnung des Massenträgheitsmoments $J^A$:

$$J^A = \frac{1}{2}m_1 R_1^2 + \frac{1}{2}m_2 R_2^2$$

$$J^A = \frac{1}{2}m(2R)^2 + \frac{1}{2}mR^2 = 2\frac{1}{2}mR^2$$

Einsetzten von $J^A$der Kontaktkraft $F_K$ führt auf:

$$(2\frac{1}{2}mR^2 + \frac{1}{2}mR^2)\ddot{\varphi} + 4dR^2\dot{\varphi} + 2cR^2\varphi = 0$$

Die Bewegungsgleichung lautet somit:

$$\ddot{\varphi} + \frac{4}{3}\frac{d}{m}\dot{\varphi} + \frac{2}{3}\frac{c}{m}\varphi = 0$$

b) Eigenkreisfrequenz $\omega_0$ aus Bewegungsgleichung ablesen:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2c}{3m}}$$

c) Berechnung des logarithmischen Dekrements $\Lambda$:

$$\Lambda \; = \frac{1}{6}\ln\frac{\hat{\varphi}_1}{\hat{\varphi}_7} \; = \; \frac{1}{6}\ln\frac{\hat{\varphi}_1}{\hat{\varphi}_1 e^{-0,6}} \; = \; \frac{1}{6}\ln e^{0,6} \; = \; \frac{1}{6}0,6 \; = \; 0,1$$

Berechung des Lehrschen Dämpfungsmaßes für das schwach gedämpte System:

$$D \; = \; \frac{\Lambda}{\sqrt{4\pi^2 + \Lambda^2}} \; \approx \; \frac{\Lambda}{2\pi} \; \approx \; \frac{0,1}{2\pi}$$

Aus Koeffizientenvergleich der Bewegungsgleichung mit allgemeiner Form folgt:

$$2D\omega_0 = \frac{4}{3}\frac{d}{m} \;\Rightarrow\; d = \frac{3}{2}D\omega_0 m = \frac{0,3}{4\pi}\sqrt{\frac{2}{3}cm}$$

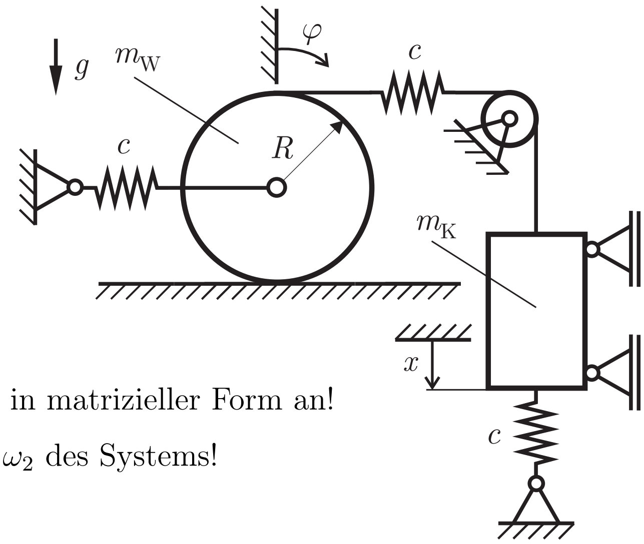
Berechnen der Eigenkreisfrequenz $\omega_d$ des schwach gedämpften Systems:

$$\omega_d = \omega_0\sqrt{1 - D^2} = \sqrt{\frac{2c}{3m}(1 - \frac{0,01}{4\pi^2})}$$

**Musterlösungen (ohne Gewähr)**

**Aufgabe 8 ($\approx$ 7 Punkte)**

Ein schwingungsfähiges System besteht aus einer homogenen Walze (Radius $R$, Masse $m_\mathrm{W}$), einem Klotz (Masse $m_\mathrm{K}$) und einer masselosen Umlenkrolle. Die Walze rollt ohne zu rutschen auf dem Untergrund ab und ist schlupffrei von einem undehnbaren, masselosen Seil umschlungen. Das System ist so vorgespannt, dass die Seile stets gespannt sind.




a) Geben Sie die Bewegungsgleichung des Systems in matrizieller Form an!

b) Berechnen Sie die Eigenkreisfrequenzen $\omega_1$ und $\omega_2$ des Systems!

Gegeben: $R$, $m$, $m_\mathrm{K}= m$, $m_\mathrm{W}= \dfrac{2}{3}m$, $c$, $g$.

**Lösung**

a) Bewegungsgleichung des Klotzes:

$$m_\mathrm{K}\ddot{x} + cx + c(x - 2R\varphi) = 0 \tag{1}$$

$$m\ddot{x} + 2cx - 2cR\varphi = 0 \tag{2}$$

Bewegungsgleichung der Walze:

$$J^Q\ddot{\varphi} + cR^2\varphi + 2cR(2R\varphi - x) = 0 \tag{3}$$

$$J^Q = \frac{1}{2}(\frac{2}{3}m)R^2 + (\frac{2}{3}m)R^2 = mR^2 \tag{4}$$

$$mR^2\ddot{\varphi} + 5cR^2\varphi - 2cRx = 0 \tag{5}$$

Bewegungsgleichung in matrizieller Form:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & mR^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c & -2cR \\ -2cR & 5cR^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

**Musterlösungen (ohne Gewähr)**

b) **Variante 1:** Ansatz der Form

$$q(t) = \hat{q}\cos(\omega_0 t + \psi) \quad ; \quad \dot{q}(t) = -\omega_0 \hat{q}\sin(\omega_0 t + \psi) \quad ; \quad \ddot{q}(t) = -\omega_0^2 \hat{q}\cos(\omega_0 t + \psi) \tag{7}$$

eingesetzt in Dgl. führt auf dynamische Steifigkeitsmatrix $\underline{S}$:

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} 2c - m\omega_0^2 & -2cR \\ -2cR & 5cR^2 - mR^2\omega_0^2 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Det $\underline{S}$=0 ergibt charakteristische Gleichung:

$$det\underline{S} = det \begin{bmatrix} 2c - m\omega_0^2 & -2cR \\ -2cR & 5cR^2 - mR^2\omega_0^2 \end{bmatrix} = 0 \tag{9}$$

Berechung der charakteristischen Gleichung:

$$10c^2R^2 - 2cR^2m\omega_0^2 - 5cR^2m\omega_0^2 - m^2R^2\omega^4 - 4c^2R^2 = 0 \tag{10}$$

$$\omega_0^4 - 7\frac{c}{m}\omega_0^2 + 6\frac{c^2}{m^2} = 0 \tag{11}$$

Substitution mit $\lambda = \omega_0^2$:

$$\lambda^2 - 7\frac{c}{m}\lambda + 6\frac{c^2}{m^2} = 0 \tag{12}$$

Lösen der quadratische Gleichung mittels p-q Formel:

$$\lambda_{1,2} \quad = \quad \frac{7}{2}\frac{c}{m} \mp \sqrt{\frac{7^2}{4}\frac{c^2}{m^2} - 6\frac{c^2}{m^2}} \quad = \quad \frac{7}{2}\frac{c}{m} \mp \frac{c}{m}\sqrt{\frac{49}{4} - \frac{24}{4}} \quad = \quad \frac{7}{2}\frac{c}{m} \mp \frac{5}{2}\frac{c}{m} \tag{13}$$

Führt auf:

$$\lambda_1 = 1\frac{c}{m} \quad ; \quad \lambda_2 = 6\frac{c}{m} \tag{14}$$

Rücksubstitution auf $\omega_0 = \sqrt{\lambda}$ liefert die Eigenkreisfrequenzen $\omega_1$ und $\omega_2$ des Systems:

$$\omega_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad ; \quad \omega_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{6\frac{c}{m}} \tag{15}$$

**Musterlösungen (ohne Gewähr)**

b) **Variante 2:**

Normierung der Matrizenform:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\frac{c}{m} & -2\frac{cR}{m} \\ -2\frac{c}{mR} & 5\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{16}$$

mit:

$$\omega_1^2 = 2\frac{c}{m} \tag{17}$$

$$\omega_{11}^2 = 5\frac{c}{m} \tag{18}$$

$$\gamma_1^2 = -2\frac{cR}{m} \tag{19}$$

$$\gamma_{11}^2 = -2\frac{c}{mR} \tag{20}$$

Die Eigenkreisfrequenzen ergeben sich:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left(2\frac{c}{m} + 5\frac{c}{m}\right) \mp \sqrt{\frac{1}{4}\left(2\frac{c}{m} - 5\frac{c}{m}\right)^2 + \left(-2\frac{cR}{m}\right) \cdot \left(-2\frac{c}{mR}\right)} \tag{21}$$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{7}{2}\frac{c}{m} \mp \sqrt{\frac{9}{4}\frac{c^2}{m^2} + \frac{16}{4}\frac{c^2}{m^2}} = \frac{7}{2}\frac{c}{m} \mp \sqrt{\frac{25}{4}\frac{c^2}{m^2}} = \frac{7}{2}\frac{c}{m} \mp \frac{5}{2}\frac{c}{m} \tag{22}$$

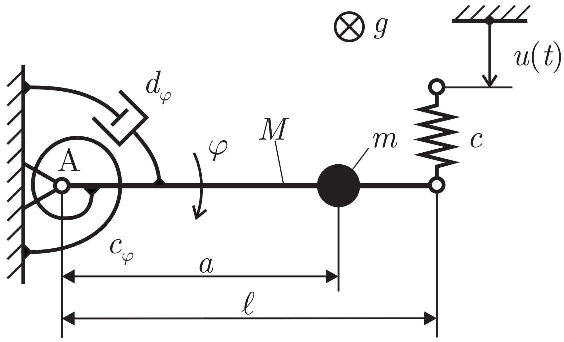
Die Eigenkreisfrequenzen $\omega_1$ und $\omega_2$ des Systems ergeben sich damit zu:

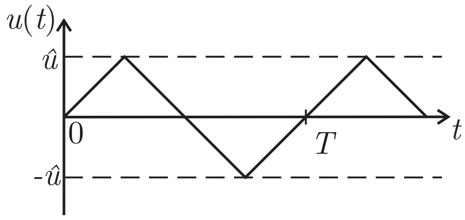
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad ; \quad \omega_2 = \sqrt{6\frac{c}{m}} \tag{23}$$

**Musterlösungen (ohne Gewähr)**

**Aufgabe 9 (≈ 8 Punkte)**

Ein lineares Schwingungssystem wird über eine Zusatzfeder, deren Fußpunktbewegung $u(t)$ vorgegeben ist, zu kleinen Schwingungen angeregt. Die Bewegung des Fußpunktes der Zusatzfeder hat den skizzierten periodischen Verlauf.




a) Geben Sie die Bewegungsgleichung des Systems an!

b) Berechnen Sie die Eigenkreisfrequenz $\omega_0$ und den Dämpfungsgrad $D$ des Systems!

c) Entwickeln Sie die Anregung $u(t)$ in eine Fourier-Reihe!

d) Berechnen Sie die Grundharmonische der Systemantwort $\varphi(t)$ für den eingeschwungenen Zustand!

Gegeben: $a$, $\ell$, $\hat{u}$, $M$, $m$, $c$, $c_\varphi$, $d_\varphi$, $T$, $g$.

**Lösung**

a) $J^{(A)} = \dfrac{1}{3}M\ell^2 + ma^2$

$$J^{(A)}\ddot{\varphi} + d_\varphi\dot{\varphi} + (c_\varphi + c\ell^2)\varphi = c\ell u(t);$$

b) $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{c_\varphi + c\ell^2}{J^{(A)}}};$

$$D = \frac{d_\varphi}{2\sqrt{J^{(A)}(c_\varphi + c\ell^2)}};$$

**Musterlösungen (ohne Gewähr)**

c) Anregungskreisfrequenz:

$$\Omega = \frac{2\pi}{T}$$

Fourierreihe:

$$u(t) = \frac{8\hat{u}}{\pi^2}\left(\sin \Omega t - \frac{\sin 3\Omega t}{3^2} + \frac{\sin 5\Omega t}{5^2} - ...\right)$$

alternativ:

$$= \frac{8\hat{u}}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\sin((2k-1)\Omega t)}{(2k-1)^2}$$

d) Systemantwort im eingeschwungenen Zustand (partikuläre Lösung):

$$\varphi_p(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\hat{\varphi}_k \sin\left((2k-1)\Omega t - \psi_k\right)$$

Grundharmonische der Systemantwort (k=1):

$$\varphi_{p1}(t) = \hat{\varphi}_1 \sin(1\Omega t - \psi_1)$$

Frequenzverhältnis:

$\eta_1 = \dfrac{\Omega}{\omega_0}$ Schwingungsamplitude:

$$\hat{\varphi}_1 = \frac{8\hat{u}}{\pi^2}\frac{c\ell}{c_\varphi + c\ell^2}V(\eta_1) = \frac{8\hat{u}}{\pi^2}\frac{c\ell}{c_\varphi + c\ell^2}\frac{1}{\sqrt{(1-\eta_1^2)^2 + (2D\eta_1)^2}}$$

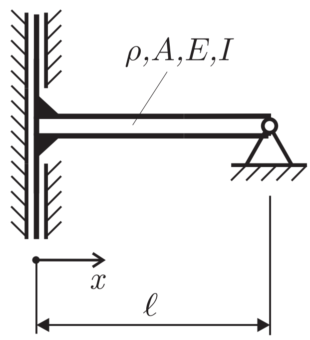
Phasenverschiebung:

$$\tan\psi_1 = \frac{2D\eta_1}{1-\eta_1^2}$$

**Musterlösungen (ohne Gewähr)**

**Aufgabe 10 (≈ 8 Punkte)**

Gegeben ist der dargestellte gerade, schlanke Balken. Nehmen Sie kleine Verformungen an und vernachlässigen Sie Schubverformungen.




a) Geben Sie alle Randbedingungen an!

b) Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Eigenkreisfrequenzen und Eigenformen mithilfe eines geeigneten Ansatzes auf!

c) Bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenzen und Eigenformen!

Gegeben: $\ell$, $\rho$, $A$, $E$, $I$.

**Lösung**

**Randbedingungen**

$w(\ell) = w'(0) = w''(\ell) = w'''(0) = 0$

**Bestimmung Eigenkreisfrequenz und Eigenform**

Bewegungsgleichung: $EIw^{IV}(x,t) + \rho A\ddot{w}(x,t) = 0$

Seperation: $w(x,t) = W(x)Q(t)$

Abkürzungen: $\mathrm{c}(\ldots) = \cos(\ldots)$, $\mathrm{s}(\ldots) = \sin(\ldots)$, $\mathrm{C}(\ldots) = \cosh(\ldots)$, $\mathrm{S}(\ldots) = \sinh(\ldots)$

Ansatz für $W(x)$: $W(x) = a_1\mathrm{c}(kx) + a_2\mathrm{s}(kx) + a_3\mathrm{C}(kx) + a_4\mathrm{S}(kx)$

Die Ableitungen folgen:

$$W'(x) = -a_1k\mathrm{s}(kx) + a_2k\mathrm{c}(kx) + a_3k\mathrm{S}(kx) + a_4k\mathrm{C}(kx)$$
$$W''(x) = -a_1k^2\mathrm{c}(kx) - a_2k^2\mathrm{s}(kx) + a_3k^2\mathrm{C}(kx) + a_4k^2\mathrm{S}(kx)$$
$$W'''(x) = a_1k^3\mathrm{s}(kx) - a_2k^3\mathrm{c}(kx) + a_3k^3\mathrm{S}(kx) + a_4k^3\mathrm{C}(kx)$$

Mit den Randbedingung folgt das Gleichungssystem

$w'(0,t) : 0 = a_2 + a_4$ **G1**

$w'''(0,t) : 0 = -a_2 + a_4$ **G2**

$w(L,t) : 0 = a_1\mathrm{c}(kL) + a_2\mathrm{s}(kL) + a_3\mathrm{C}(kL) + a_4\mathrm{S}(kL)$ **G3**

$w''(L,t) : 0 = -a_1\mathrm{c}(kL) - a_2\mathrm{s}(kL) + a_3\mathrm{C}(kL) + a_4\mathrm{S}(kL)$ **G4**

aus **G1** und **G2** sieht man leicht: $a_2 = a_4 = 0$

## Musterlösungen (ohne Gewähr)

damit bleiben **G3'** und **G4'**

$0 = a_1 \mathrm{c}(kL) + a_3 \mathrm{C}(kL)$ **G3'**
$0 = -a_1 \mathrm{c}(kL) + a_3 \mathrm{C}(kL)$ **G4'**

**G3'**+**G4'** : $2a_3\mathrm{C}(kL) = 0$, da $\mathrm{C}(kL) \neq 0$ folgt $a_3 = 0$

**G3'-G4'** : $2a_1\mathrm{c}(kL) = 0$, nicht triviale Lösung für $\mathrm{c}(kL) = 0$

Somit ist die Charakteristische Gleichung $\mathrm{c}(kL) = 0$

deren Lösung folgt als $k = \dfrac{\pi(2n-1)}{2L}$ mit $n = 1, 2, 3, ...$

für die Eigenfrequenz folgt daher mit $k^4 = \omega^2 \dfrac{A\rho}{EI}$

$$\omega_n = \frac{\pi^2(2n-1)^2}{4L^2}\sqrt{\frac{EI}{A\rho}}$$

Die Eigenformen folgen mit $a_2 = a_3 = a_4 = 0$ und $a_1$ beliebig :

$$W_n(x) = a_1 \mathrm{c}\left(\frac{\pi(2n-1)}{2L}x\right) \text{ mit } n = 1, 2, 3, ...$$