

# **Das dynamische Verhalten von alternierend verstimmten Schaufelkränzen mit Reibelementkopplung**

Von der Fakultät für Maschinenbau  
der Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover  
zur Erlangung des akademischen Grades  
Doktor-Ingenieurin/Doktor-Ingenieur  
genehmigte

**Dissertation**

von  
**Dipl.-Ing. Sebastian Tatzko**  
geb. am 28. Februar 1983 in Nienburg/Weser

2016

1. Referent: Prof. Dr.-Ing. habil. Jörg Wallaschek
2. Referent: Prof. Dr.-Ing. Jörg Seume
3. Referent: Prof. Dr.-Ing. habil. Peter Nyhuis

Tag der Promotion: 25. Februar 2016

## Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Dynamik und Schwingungen der Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover.

Besonders bedanken möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Jörg Wallaschek für das Vertrauen in meine Arbeit und die Möglichkeit zur Promotion. Herrn Prof. Dr.-Ing. Jörg Seume danke ich für die Übernahme des zweiten Referats. Bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Peter Nyhuis bedanke ich mich für die freundliche Übernahme des Vorsitzes der Prüfungskommission.

Allen aktiven und ehemaligen Kollegen am Institut für Dynamik und Schwingungen, die zum Gelingen meiner Arbeit beigetragen haben möchte ich ganz herzlich danken. Mit vielen Kollegen hatte ich eine tolle gemeinsame Zeit mit interessanten fachlichen und privaten Gesprächen. Ich habe am Institut viele neue Freunde gewonnen.

Ganz herzlich bedanken möchte ich mich bei Dr.-Ing. Matthias Wangenheim, der mich nach meiner Diplomarbeit zur Promotion motiviert und mich dabei immer unterstützt hat. An die kurze, aber schöne Zeit in der Arbeitsgruppe *Kontaktmechanik und Reibung* denke ich sehr gern zurück. Es freut mich sehr, dass ich mit Dipl.-Ing. Saša Mihajlović während meiner gesamten Promotionszeit am Institut ein Büro teilen durfte.

Weiterhin gilt mein Dank insbesondere Dr.-Ing. Lars Panning-von Scheidt, der mir als Leiter der Arbeitsgruppe *Dynamik rotierender Maschinen* auch über fachliche Fragestellungen hinaus immer zur Seite stand. Den Arbeitskollegen in der "*Turbogruppe*" danke ich für den fachlichen Austausch und das stetige Interesse an meiner Arbeit. Jun.-Prof. Dr.-Ing. Malte Krack danke ich für seine wertvollen Impulse, die wesentlich zum Gelingen meiner Arbeit beigetragen haben. Dipl.-Ing. Sebastian Schwarzendahl, Dipl.-Ing. Andreas Renner sowie M. Sc. Linus Pohle danke ich für die herzliche Diskussionsbereitschaft. M. Sc. Torsten Heinze danke ich dafür, dass er noch den ein oder anderen Fehler in meinen Formeln gefunden hat.

Meinen Eltern Bärbel und Lothar und Geschwistern Veronika, Henrike und Florian danke ich für ihren Rückhalt. Ebenfalls großer Dank gilt meiner lieben Freundin Anke, die während meines Studiums und der Promotion immer für mich da war und mich in allen Belangen unterstützt hat.

Sebastian Tatzko

Hannover, im März 2016

## Kurzfassung

Schaufelkränze in Turbomaschinen können im Betrieb durch die Fluid-Struktur-Interaktion stark belastet sein. Da Schaufelblattstrukturen in erster Linie aerodynamisch optimiert werden, sind sie häufig schwingungsanfällig und müssen im Kontext der anregenden Kräfte und Momente robust ausgelegt werden.

Durch das umströmende Fluid können selbsterregte Schwingungen an einem Schaufelprofil bzw. einer Schaufelkranzstufe des Rotors entstehen, die als Flattern bezeichnet werden. Flatterschwingungen können durch eine bewusste Frequenzverstimmung der Struktur gezielt beeinflusst und die Gefahr aerodynamischer Instabilitäten reduziert werden. Die alternierende Frequenzverstimmung benachbarter Schaufeln, die sogenannte A-B-Verstimmung, stellt eine gängige Maßnahme zur Flutterstabilisierung dar. Neben der Strömungsselbsterregung kommt der Fremderregung durch periodische Kräfte zwischen aufeinanderfolgenden Schaufelgittern eine entscheidende Bedeutung zu. Die Frequenz dieser Anregung ist proportional an die Rotordrehzahl gekoppelt und regt über den Umfang umlaufende Wellen am Schaufelkranz an. Diese Schwingungsanregung lässt sich in der Regel nicht vermeiden und sollte nicht zu Resonanz führen, d. h. keine Eigenfrequenz des Schaufelkranzes sollte mit einer Anregungsfrequenz im Betrieb übereinstimmen. Aufgrund geringer Dämpfung der Struktur sind dennoch starke Schwingungsbelastungen der Schaufeln möglich. Die Dämpfung wird häufig durch gezielt eingebrachte Reibkontakte zwischen den Schaufeln erhöht, sodass ein sicherer Betrieb gewährleistet ist.

In dieser Arbeit wird der bisher wenig beachtete Fall einer Kombination von bewusster alternierender Frequenzverstimmung und Reibungskopplung analysiert. Es werden Reibelemente zwischen benachbarten Schaufeln betrachtet, die durch Fliehkräfte an die Schaufeln gepresst werden. Die Optimierung dieser Reibungsdämpfer wird direkt von der Dynamik der linearen, verstimmteten Struktur beeinflusst. Es wird gezeigt, dass sich die Dämpfungswirkung durch eine Verstimmung gegenüber der unverstimmteten Struktur verbessern lässt. Möglichkeiten und Bedingungen dieser Verbesserung werden anhand von einfachen Modellen untersucht. Darüber hinaus wird eine Methodik zum systematischen Vorgehen bei der Auslegung von Reibungsdämpfern für Schaufelkränze mit A-B-Verstimmung erarbeitet.

**Schlagwörter:** Alternierende Verstimmung, Reibelemente, Reibdämpferauslegung



# Abstract

## **The Dynamics of Alternately Mistuned Turbine Bladings with Friction Damper Coupling**

Turbine bladings can be exposed to high loads due to fluid structure interaction. Since blade geometries are optimized with respect to aerodynamic issues they are often prone to mechanical vibrations. For a robust blade design structural dynamics and excitation have to be taken into account.

Aerodynamic flow conditions can lead to self-excited vibrations called flutter. Intentional frequency mistuning of the cyclic structure has been found to overcome aerodynamic instabilities. A widely used form is an alternating pattern of two types of blades known as A-B-mistuning. Furthermore, there are periodic external forces caused by the flow interaction of successive stages in the turbo-engine. The frequency of this external excitation is proportional to the rotor speed and excites travelling waves with a certain phase shift between neighboring blades. This external excitation is usually not avoidable and it is important to ensure that no resonant operating condition occurs. Since damping of turbine blades is generally low high levels of response can yet appear. Friction damping through underplatform dampers is often used to increase the overall damping of turbine bladings. The friction dampers are designed to influence the dynamics in order to achieve safe operating conditions.

The present work focusses on the combination of alternating frequency mistuning of blades with friction damper coupling. The influence of A-B-mistuning on the friction damper optimization is analyzed. Possibilities and limits of the damping performance with mistuning are exposed and it will be shown that friction damping can even be higher in the mistuned case. Additionally, a systematic approach to friction damper design for A-B-mistuned bladed disks is developed.

**Key words:** Alternating mistuning, underplatform dampers, friction damper design

# Inhaltsverzeichnis

<b>Kurzfassung</b>	<b>IV</b>
<b>Abstract</b>	<b>V</b>
<b>Formelverzeichnis</b>	<b>VIII</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Stand des Wissens</b>	<b>4</b>
2.1 Anregung von Schaufelschwingungen . . . . .	4
2.1.1 Selbsterregte Schaufelschwingungen . . . . .	4
2.1.2 Fremderregte Schaufelschwingungen . . . . .	9
2.2 Dämpfung und Stabilisierung von Schaufelschwingungen . . . . .	12
2.2.1 Flatterstabilisierung durch Verstimmung . . . . .	12
2.2.2 Schwingungsdämpfung durch Reibelemente . . . . .	14
2.3 Modellierung und Analyse . . . . .	20
2.3.1 Kontaktmodellierung und Analyse im Frequenzbereich . . . . .	20
2.3.2 Dämpfungsmodellierung . . . . .	23
2.3.3 Zyklisch symmetrische Strukturen . . . . .	25
<b>3 Gegenstand der Arbeit</b>	<b>28</b>
3.1 Bewertung des Stands des Wissens . . . . .	28
3.2 Aufgabenstellung . . . . .	30
3.3 Vorgehensweise . . . . .	31
<b>4 Zyklische Symmetrie und Harmonischer Index</b>	<b>32</b>
4.1 Rotationssymmetrische Strukturen . . . . .	32
4.2 Zyklisch symmetrische Strukturen . . . . .	34
<b>5 Modellbildung und Systemverhalten</b>	<b>36</b>
5.1 Minimalmodell für einen unverstimmten Schaufelkranz . . . . .	37
5.2 Minimalmodell für einen alternierend verstimmten Schaufelkranz . . . . .	41
5.3 Modalanalyse eines Finite Elemente Schaufelkranzes mit alternierender Frequenzverstimmung . . . . .	47
5.4 Modellierung der Anregung . . . . .	48
5.5 Anregbarkeit des Systems . . . . .	53

---

5.5.1	Anregbarkeit des unverstimmten Systems . . . . .	53
5.5.2	Anregbarkeit des alternierend verstimmten Systems . . . . .	56
5.6	Schwingungsantwort des linearen Systems . . . . .	59
<b>6</b>	<b>Unverstimmte Schaufelkränze mit Reibungskopplung</b>	<b>67</b>
6.1	Schwingerkette mit COULOMB-scher Reibung . . . . .	67
6.2	Erweiterung auf das Elasto-Gleit-Kontaktmodell . . . . .	73
<b>7</b>	<b>Alternierend verstimmte Schaufelkränze mit Reibungskopplung</b>	<b>75</b>
7.1	Methode der Harmonischen Balance bei nichtlinearen Systemen . . . . .	75
7.2	Verstimmtes Modell mit Elasto-Gleit-Kontakt . . . . .	79
7.2.1	Entwicklung der Systemgleichung . . . . .	79
7.2.2	Berechnung der nichtlinearen Kräfte . . . . .	82
7.2.3	Parameterwahl und Systemanalyse . . . . .	84
7.3	Verstimmtes Modell mit Reibelementen . . . . .	90
7.3.1	Entwicklung der Systemgleichung . . . . .	90
7.3.2	Berechnung der nichtlinearen Kräfte . . . . .	93
7.3.3	Parameterwahl und Systemanalyse . . . . .	96
<b>8</b>	<b>Diskussion der erzielten Ergebnisse</b>	<b>102</b>
<b>9</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>105</b>
	<b>Anhang</b>	<b>108</b>
<b>A</b>	<b>Eigenwerte des alternierend verstimmten Minimalmodells</b>	<b>109</b>
<b>B</b>	<b>Grenzwertbestimmung des Verhältnissfaktors der Eigenvektoren</b>	<b>113</b>
<b>C</b>	<b>Überprüfung der komplexen Differenzierbarkeit</b>	<b>114</b>
<b>D</b>	<b>Schwingungsantwort des Minimalmodells mit COULOMB-scher Reibung</b>	<b>117</b>
<b>E</b>	<b>Fourierkoeffizientenbestimmung der Kontaktkraftverläufe mit der DFT</b>	<b>120</b>
E.1	Elasto-Gleit-Kontakt . . . . .	120
E.2	Reibelementkontakt . . . . .	120
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>122</b>

# Formelverzeichnis

Selten benutzte Formelzeichen und Begriffe sowie abweichende Bedeutungen werden ausschließlich im Text erläutert. Vektorielle Größen werden im Allgemeinen durch fette Kleinbuchstaben, matrizielle Größen durch fette Großbuchstaben gekennzeichnet.

## Lateinische Notation

${}^{12}A$	Transformationsmatrix zwischen den Koordinatensystemen 1 und 2
$c$	Federsteifigkeit
$D$	Dämpfungsgrad
$\mathbf{D}$	Dämpfungsmatrix
$e$	EULER'sche Zahl
$EO$	Erregerordnung
$f$	Frequenz
$f_{\text{rot}}$	Drehfrequenz
$F$	Kraft
$\mathbf{F}$	Kraftvektor
$\hat{F}_{\text{Er}}$	Erregerkraftamplitude
$\hat{\mathbf{F}}_{\text{Er}}$	Vektor der Fourierkoeffizienten der Anregung
$\hat{\mathbf{F}}_{\text{nl}}$	Vektor der Fourierkoeffizienten nichtlinearer Kräfte
$\mathbf{H}$	dynamische Nachgiebigkeitsmatrix
$HI$	Harmonischer Index
$i$	imaginäre Einheit
$\mathbf{I}$	Einheitsmatrix
$j$	Zählindex
$k$	Zählindex
$\mathbf{K}$	Steifigkeitsmatrix
$l$	Zählindex
$m$	Masse
$\mathbf{M}$	Massenmatrix
$N$	Schwingerzahl, Matrixdimension
$N_{\text{rot}}$	Rotorscheaufelzahl
$N_{\text{stat}}$	Statorschaufelzahl
$\mathbf{q}$	Vektor modaler Verschiebungen
$\hat{\mathbf{Q}}$	Vektor der Fourierkoeffizienten modaler Verschiebungen

$R$	Residuum
$S$	Dynamische Steifigkeitsmatrix
$T$	Periodendauer
$T$	Transformationsmatrix
$u$	Vektor physikalischer Verschiebungen
$\hat{U}$	Vektor der Fourierkoeffizienten physikalischer Verschiebungen
$w$	Vektor der Relativverschiebungen
$x, y$	Verschiebung, Auslenkung

## Griechische Notation

$\alpha$	Verstimmungsverhältnis
$\beta$	Plattformwinkel
$\delta$	Schaufelteilungswinkel
$\Delta\varphi$	Phasenversatzwinkel der Anregung
$\Delta\tilde{\varphi}$	Phasenversatzwinkel der Schwingungsform
$\Delta\tilde{\psi}$	Phasenversatzwinkel der Schwingungsform nach zwei Schaufeln
$\kappa_{\text{ver}}$	Verstimmungsfaktor
$\kappa_{\text{rel}}$	Faktor der relativen Kopplung
$\Lambda$	Spektralmatrix
$\mu$	Reibungskoeffizient
$\omega$	Eigenkreisfrequenz
$\Omega_{\text{Er}}$	Anregungskreisfrequenz
$\Omega_{\text{rot}}$	Rotationskreisfrequenz
$\phi$	Eigenvektor
$\Phi$	Modalmatrix

## Indizes und weitere Formelzeichen

$\hat{()}$	Amplitude einer harmonischen Größe
$\tilde{()}$	komplexe Amplitude der diskreten Fouriertransformation
$\#$	normierte, dimensionslose Größe
$*$	harmonische Näherungsgröße
$\overline{()}$	Mittelwert
$\underline{()}$	komplexe Größe
$()^T$	transponierte Matrix
$()^H$	hermitesch transponierte Matrix
$()^{-1}$	inverse Matrix

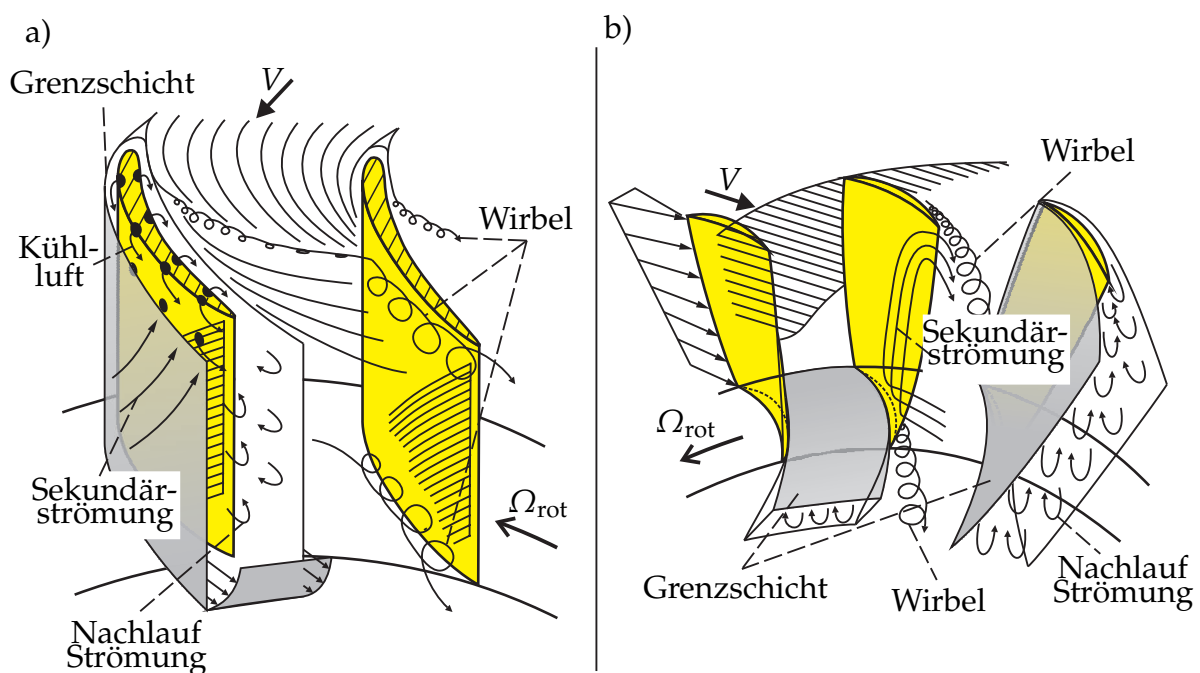
$\Re \{ \}$	Realteil
$( )^{\Re}$	Realteil
$\Im \{ \}$	Imaginärteil
$( )^{\Im}$	Imaginärteil

## Abkürzungen

AFT	Alternating Frequency Time Method
DFT	Diskrete Fourier Transformation
DLFT	Dynamic Lagrangian Mixed Frequency Time Method
FEM	Finite Elemente Modell
FFT	Fast Fourier Transformation
HBM	Harmonische Balance Methode
MKS	Mehrkörpersystem

# 1 Einleitung

Die Dynamik beschauelter Scheiben ist seit Jahrzehnten Gegenstand der Arbeit und Forschung von Ingenieuren auf der ganzen Welt. Die Anwendungen sind vielfältig und reichen von Lüfterrädern in Computern über Turbolader und Radialpumpen bis hin zu Flugzeugtriebwerken und Kraftwerksturbinen. Neben Triebwerkskomponenten, deren Ausfall lebensgefährliche Folgen haben kann, ist eine robuste Auslegung bei stationär betriebenen Gas- und Dampfturbinen gefordert, um kostenreiche Ausfallzeiten und Beschädigungen zu minimieren. Die Beschauelungen sind hohen thermischen und mechanischen Belastungen ausgesetzt und werden durch spezielle Kühlung und eine geeignete Auswahl von hochfesten Werkstoffen gezielt an die Betriebsbedingungen angepasst. Die umströmten Schaufeln erfahren im Betrieb periodische Belastungen, die zum Versagen der Bauteile führen können. Ein Schwerpunkt bei der Auslegung von Schaufelkränzen ist die Vorhersage und Begrenzung dieser Schwingungslastungen.



**Bild 1.1:** Strömungsverhältnisse in Turbomaschinen nach SRINIVASAN [92]; a) Turbinenschaufelgitter; b) Verdichterschaufelgitter

In **Bild 1.1** sind schematisch die Strömungsverhältnisse in zwei Arten von Strömungsmaschinen dargestellt, der Turbine und dem Verdichter. In einer Turbine wird dem hindurchströmenden Fluid Energie entzogen und in mechanische Energie gewandelt, weshalb Turbinen auch als Kraftmaschinen bezeichnet werden. In einem Verdichter hingegen wird mechanische Energie genutzt, um die Energie des hindurchströmenden Fluids zu erhöhen. Die Enthalpie, sowie Druck und Temperatur des Fluids steigen während des Verdichtens an. Verdichter werden auch als Arbeitsmaschinen bezeichnet, vgl. [52, S. 285]. Die Schwingungsantwort eines durch periodisch wirkende Fluid- und Gaskräfte angeregten Schaufelkranzes wird sowohl durch die Anregung, als auch durch die Eigenschwingung des Systems bestimmt. Bei der Auslegung von Schaufelkränzen sollten die Eigenfrequenzen nicht mit Anregungsfrequenzen zusammenfallen, um Resonanzüberhöhungen zu vermeiden.

Fremderregte Schaufelschwingungen können aufgrund geringer Strukturdämpfung zu hohen Schwingungsantworten führen und das Einbringen von Reibkontakten in Strömungsmaschinen hat sich bewährt, um Schwingungsenergie aus dem dynamischen System abzuführen. Ein direkter Kontakt benachbarter Schaufeln kann über ein geteiltes Deckband oder einen geteilten Stützflügel erfolgen. Darüber hinaus ist eine Kopplung über Reibelemente verbreitet, welche durch Fliehkräfte an benachbarte Schaufeln im Schaufelfußbereich gepresst werden. Eine Relativbewegung führt auf diese Weise zu Reibkräften in den Kontaktstellen, die der Bewegung entgegenwirken. Die vergleichsweise kostengünstige Reibungskopplung stellt bei Schwingungsanalysen aufgrund nichtlinearer Kontaktkräfte eine große Herausforderung dar.

Neben der Schwingungsminderung durch Reibung kann eine Verstimmung der Schaufeln zur Steigerung der Robustheit gegenüber aerodynamischer Anfachung genutzt werden. Instabile Schwingungen sind in Turbomaschinen durch die Fluid-Struktur-Interaktion in Form von strömungsinduzierter Selbsterregung möglich. Die Störung der Symmetrie des Schaufelkranzes durch eine Verstimmung der Schaufeln hemmt die für zyklische Systeme typische Wellenausbreitung in der Struktur. Schaufelverstimmungen können jedoch eine Energielokalisierung verursachen, bei der sich ein Großteil der in das System eingebrachten Energie in einer oder einigen wenigen Schaufeln konzentriert, die in der Folge stark beansprucht werden. Die Gefahr von Lokalisierungseffekten durch zufällige Verstimmungen lässt sich durch eine einfache Form der bewussten Verstimmung verringern, bei der nur zwei verschiedene Schaufeltypen abwechselnd im Schaufelkranz angeordnet werden. Diese bewusste alternierende Schaufelverstimmung bietet eine Möglichkeit zur Stabilisierung von strömungserregten Schaufelkranzschwingungen ohne Lokalisierungsgefahr.

Die bewusste Verstimmung von zyklischen Strukturen ist in der Forschung ausführlich behandelt und wird in der Praxis angewendet. Ebenso wird die nichtlineare Reibungskopplung vielfach eingesetzt, um Resonanzfrequenzen zu beeinflussen und Schwingungsenergie aus der Struktur abzuführen. Für beide Themengebiete liegen Auslegungskriterien vor, wie eine optimale Wirkung, zumindest in der Theorie, erreicht werden



kann. Allerdings ist der parallele Einsatz von bewusster Verstimmung und nichtlinearer Kopplung nur wenig erforscht. Im Hinblick auf schlankere Strukturen und leistungsfähigere Maschinen wird die Frage nach Möglichkeiten und Risiken einer Wechselwirkung von Verstimmung und Reibungsdämpfung aufgeworfen. Diese Kombination wird in der vorliegenden Arbeit ausführlich behandelt. Eine bewusste Verstimmung wird in Form der alternierenden Schaufelanordnung berücksichtigt. Der Kontakt durch Reibelemente zwischen den Schaufeln wird in zwei Schritten behandelt. In einem ersten Schritt wird der Kontakt mit Elasto-Gleit-Kontaktelementen auf die Tangentialbewegung reduziert. Anschließend werden massebehaftete Reibkörper mit zwei translatorischen Starrkörperfreiheitsgraden in das Strukturmodell integriert. Mit dieser stufenweisen Modellverfeinerung können fundamentale und nachvollziehbare Zusammenhänge aufgezeigt werden. Mit dem Verständnis der Systemdynamik werden Frequenzantworten alternierend verstimmt und reibungsgekoppelter Schaufelkränze numerisch untersucht. Die gewonnenen Erkenntnisse geben Aufschluss über Einsatzmöglichkeiten der hier behandelten - bisher wenig beachteten - kombinierten Auslegung.

## 2 Stand des Wissens

Für die Analyse von Schaufelkranzschwingungen mit Reibkontakten und bewusster Verstimmung bieten sich verschiedene Modellierungs- und Berechnungsmethoden an, die sich in ihrer Komplexität und Anwendbarkeit unterscheiden. Neben der Wahl einer hinreichend genauen Strukturmodellierung des Schaufelkranzes ist ein geeignetes Kontaktmodell entscheidend. Darüber hinaus ist ein Verständnis der Wechselwirkungen zwischen Anregungsmechanismen und Strukturschwingungen unter dem Einfluss von Verstimmungen notwendig. Im Folgenden ist eine Übersicht zum aktuellen Wissensstand der aufgeführten Themenschwerpunkte gegeben.

### 2.1 Anregung von Schaufelschwingungen

Die Hauptanregungsquelle von Schaufelschwingungen in einer Strömungsmaschine ist die Fluid-Struktur-Interaktion. Fluktuierende Gas- oder Dampfkkräfte können direkt zu einer externen Anregung der Schaufeln führen. Zudem kann das strömende Fluid mit der umströmten Struktur ein selbsterregungsfähiges System bilden. Selbsterregte Schwingungen im Zusammenhang mit Schaufel- oder Flügelprofilen werden als Flattern bezeichnet und sind aufgrund möglicher instabiler Systemzustände besonders gefährlich.

Neben den Strömungskräften können zahlreiche andere Ursachen zu Schaufelschwingungen führen. Anstreifvorgänge am Gehäuse oder Fremdkörpererschlag zeigen wie unterschiedlich die Entstehung einer Schwingung sein kann. Eine Untergliederung der Anregung wird in den folgenden Abschnitten nach den für die Auslegung in der Praxis wesentlichen Entstehungsmechanismen Fremd- und Selbsterregung vorgenommen.

#### 2.1.1 Selbsterregte Schaufelschwingungen

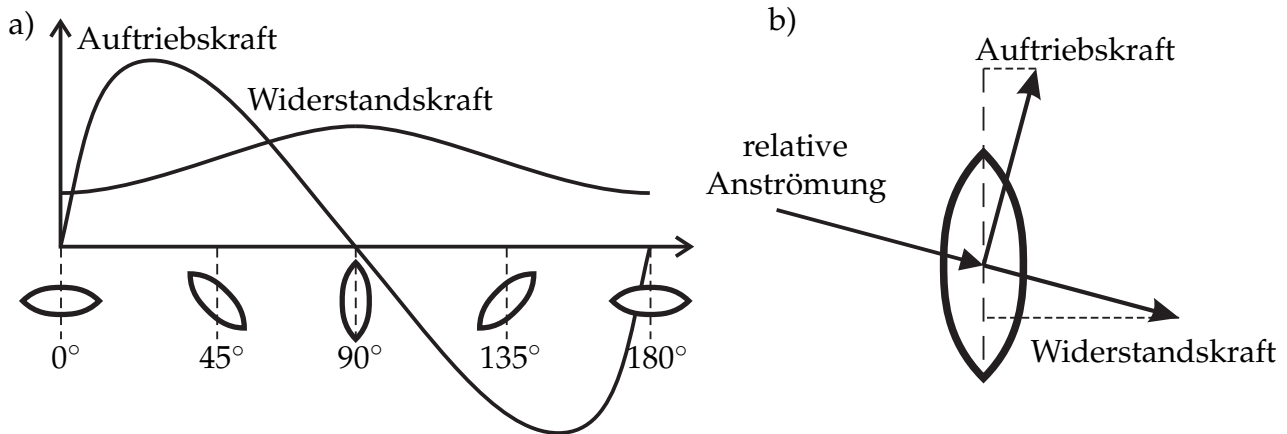
Selbsterregte Schwingungen sind gekennzeichnet durch einen Energieeintrag in das System während einer Schwingungsperiode. Im System vorhandene Dämpfung kann diese Anfachung ausgleichen und zu sogenannten Grenzykelschwingungen mit konstanter Amplitude führen. Die Grenzykelfrequenz wird dabei durch das schwingungsfähige System bestimmt. Neben begrenzten Schwingungen sind auch instabile Zustände mit bis

zum Versagen der Bauteile anwachsender Auslenkung möglich, die durch gezielte Maßnahmen vermieden werden müssen.

Der Kontakt zwischen Rotor und dem Gehäuse stellt ein klassisches Beispiel für Reibungsselbsterregung dar, bei dem die Energie aus der Rotation als Quelle für die Schwingungsanregung der Laufschaufeln dient. Das Anstreifen der Laufschaufeln kann bewusst zugelassen werden, um den Radialspalt und damit den Leistungsverlust einer Maschine möglichst gering zu halten. Freistehende Schaufeln können mit einer Anstreifkante versehen werden, die den Wärmeeintrag durch Reibung an der Schaufelspitze reduziert, vgl. LECHNER & SEUME [52, S. 551–552]. Darüber hinaus wird nach LECHNER & SEUME [52, S. 581] bei Beschaukelungen mit Deckbändern ein weiches Anstreifmaterial im Gehäuse aufgelötet, das durch die Laufschaufeln abgetragen werden soll. SALVAT ET AL. [80] beschreiben das Anstreifen mit Materialabtragung mathematisch mit einer retardierten Differentialgleichung (*delayed differential equation*). Der Prozess des Abriebs einer im Gehäuse eingebrachten abrasiven Schicht wird dabei mit dem Rattern von Werkzeugmaschinen verglichen.

Die Fluid-Struktur-Interaktion in rotierenden Maschinen kann zu selbsterregten Schwingungen führen und ist die Hauptursache für diese Art der Schwingungsanregung. Nach CARTA [10, S. 391] sind alle selbsterregten Schwingungen, die im Zusammenhang mit angeströmten Flügel- oder Schaufelprofilen auftreten können unter dem Begriff Flattern (*flutter*) zusammengefasst, auch wenn sich diese in ihren Ursachen und der Art der Schwingung unterscheiden. Der Autor nennt als zentrales Merkmal von Flattern einen negativen Dämpfungsgrad des gekoppelten Fluid-Struktur-Systems. Während einer Schwingungsperiode wird dabei dem System Energie zugeführt und eine periodische Bewegung angefacht. Zu den wichtigsten Arten zählen nach CARTA [10] gekoppeltes Flattern, Stall Flattern und Kaskadenflattern, die im Folgenden beschrieben werden.

**Gekoppeltes Flattern** ist gekennzeichnet durch die Überlagerung verschiedener Schwingungsformen, die als Modenkopplung bezeichnet wird und nur möglich ist, wenn die Frequenzen der beteiligten Schwingungsformen nahe beieinander liegen. Die häufigste Form ist dabei eine Überlagerung einer Biege- und einer Torsionsschwingungsform des betrachteten Schaufel- oder Flügelprofils. Basierend auf der grundlegenden Arbeit von THEODORSEN [94] zeigt CARTA [10] mit vereinfachten entkoppelten Bewegungsgleichungen für die erste Torsion und die erste Biegung eines Profils, dass die Frequenz der Torsionsschwingung mit der Strömungsgeschwindigkeit des Fluids abnimmt, wohingegen sich die Biegeschwingfrequenz erhöht. Schaufelprofile können demnach durch die Fluid-Struktur-Interaktion ab einer kritischen Strömungsgeschwindigkeit zu gekoppelten Flatterschwingungen neigen, bei der sich eine entsprechende Modenkopplung ergibt. Voraussetzung ist neben der Modenkopplung ein Phasenversatz zwischen den an der Schwingung beteiligten Moden, sodass die Energiebilanz über eine Schwingungsperiode positiv ist.

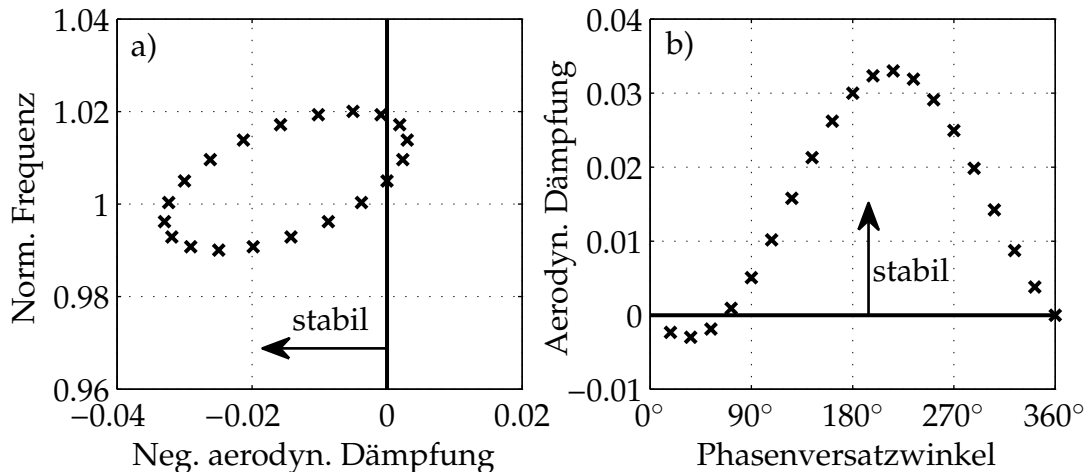


**Bild 2.1:** Stall Flattern nach DEN HARTOG [16]; a) nichtlineare Verläufe von Auftriebs- und Zugkraft an einem vereisten Leitungsquerschnitt; b) Kräfte für kleine Schwingungen um die 90° Position des Querschnitts

**Stall Flattern** ist eine Form des Flatterns, bei der im Gegensatz zu gekoppeltem Flattern die Strömung nicht mehr zu allen Zeiten am Profil anliegt und durch den Strömungsabriss während einer Schwingungsperiode ein Energieeintrag in das System auch ohne Modenkopplung ermöglicht wird. Stall Flattern ist daher geprägt durch den nichtlinearen Charakter der aerodynamischen Kräfte und Momente, vgl. DOWELL [18, S. 275]. Diese Art des Flatterns kann auftreten, wenn die Schaufel durch einen relativ großen Anströmwinkel einen Strömungsabriss auf der Saugseite erfährt, wohingegen ein Strömungsabriss auf der Druckseite der Schaufel auch als *choked flow*, bzw. *choke flutter* bezeichnet wird, vgl. CARTA [10, S. 395].

Im Zusammenhang mit Bauwerken oder Stromleitungen, die ebenfalls selbsterregte Schwingungen vom Prinzip des Stall Flatterns erfahren können, ist der Begriff *galloping* verbreitet, vgl. DOWELL [18, S. 276]. Bereits im Jahr 1932 entwickelte DEN HARTOG [16] das später nach ihm benannte Den Hartog Kriterium für *galloping*-Schwingungen von vereisten Stromüberlandleitungen, welches auch für Stall Flattern an Schaufel- oder Flügelprofilen angewendet werden kann. Für sein Kriterium setzte er die Verläufe der Widerstandskraft und der Auftriebskraft in Zusammenhang, die sich mit dem relativen Anströmwinkel ändern, vgl. **Bild 2.1** b). In **Bild 2.1** a) sind die nichtlinearen Verläufe der Auftriebs- und der Widerstandskraft für eine einfache Profilgeometrie nach DEN HARTOG [16] dargestellt. Die notwendige Bedingung für das Auftreten instabiler Schwingungen ist eine negative Steigung des Verlaufs der Auftriebskraft, wie in der 90° Position des Profils, vgl. **Bild 2.1** a). Für das um die 90° Position linearisierte System ermittelte DEN HARTOG die Stabilitätsgrenze in Abhängigkeit der Widerstandskraft.

Im ersten Teil des Handbuchs der AGARD (*Advisory Group for Aerospace Research & Development*) [76, Kapitel 7] wird zur Bestimmung der nichtlinearen Auftriebskraft an einem Schaufelprofil eine Näherung mit einem Polynomansatz vorgeschlagen. Experimentell ermittelte Verläufe können durch Anpassung der Polynomparameter charakterisiert und die Flatternanfälligkeit des zugrunde liegenden Profils analysiert werden.

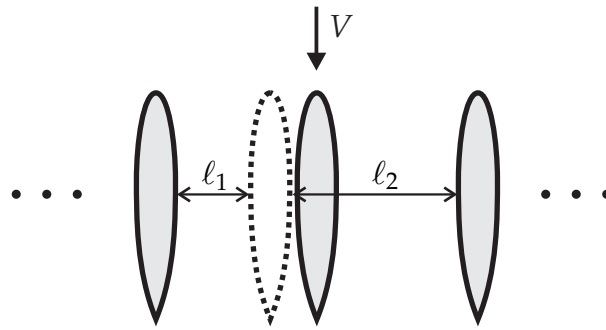


**Bild 2.2:** Eigenwerte eines mechanischen Modells mit aeroelastischer Kopplung; a) Eigenwerte in der komplexen Ebene interpretiert als Frequenz und Dämpfung; b) Charakteristischer Verlauf der aerodynamischen Dämpfung in Abhängigkeit des Phasenversatzes benachbarter Schaufeln, nach CAMPOBASSO & GILES [8]

**Kaskadenflattern** bezeichnet das Flatterverhalten von zyklischen Schaufelreihen bzw. Schaufelkränzen in Strömungsmaschinen. Zwar kann an den einzelnen Schaufeln einer Stufe gekoppeltes Flattern oder auch Stall Flattern auftreten, jedoch sind die kritischen Strömungs- oder Windgeschwindigkeiten von isoliert betrachteten Modellen aufgrund der aerodynamischen Kopplung zwischen den Schaufeln nicht direkt übertragbar. Bei Schaufelkränzen ist die Flatteranfälligkeit abhängig von der Schwingungsform des zyklischen Gesamtsystems, vgl. CARTA [10, S. 473]. Schwingungen von Schaufelkränzen können sich zyklisch über den Umfang als Wanderwellen ausbreiten, wobei der Phasenversatzwinkel zwischen benachbarten Schaufelschwingungen (*inter blade phase angle*), die zugehörige Schwingungsform charakterisiert.

In **Bild 2.2** ist für ein vereinfachtes Mehrkörpermodell mit aerodynamischen Kräften, wie es von CAMPOBASSO & GILES [8] verwendet wurde, der Verlauf der aerodynamischen Dämpfung dargestellt. Das Modell mit zwanzig Segmenten kann genau zwanzig Werte für den Phasenversatzwinkel zwischen  $0^\circ$  und  $360^\circ$  annehmen, für die sich eine geschlossene Welle über den Umfang ausbildet. Die Koppelkräfte zwischen benachbarten Schaufeln können für einige Schwingungsformen anfachend wirken, was zu einem negativen Dämpfungsgrad des Systems führt. Ein sinusähnlicher Verlauf der aerodynamischen Dämpfung, sowie Instabilität bei geringen Werten des Phasenwinkels sind auch bei realen Schaufelgeometrien zu beobachten, vgl. KIELB ET AL. [45] und SCHÖNENBORN ET AL. [84].

TRAUPEL [97] untersuchte einen anfachenden Effekt, der ebenfalls durch die Interaktion zwischen Schaufeln in einem Kranz bedingt ist. Die durchströmte Schaufelreihe in **Bild 2.3** führt bei Auslenkung der mittleren Schaufel zu einer Querschnittänderung für das Fluid. In dem kleineren Querschnitt mit Abstand  $\ell_1$  herrscht aufgrund der sich einstellenden höheren Strömungsgeschwindigkeit ein niedrigerer Druck, als im Querschnitt mit Abstand  $\ell_2$ . Die Druckverteilung verstärkt somit die Bewegung und wirkt labilisie-



**Bild 2.3:** Strömungsbedingte Labilisierung von Schaufelschwingungen durch Lageabweichung nach TRAUPEL [97]

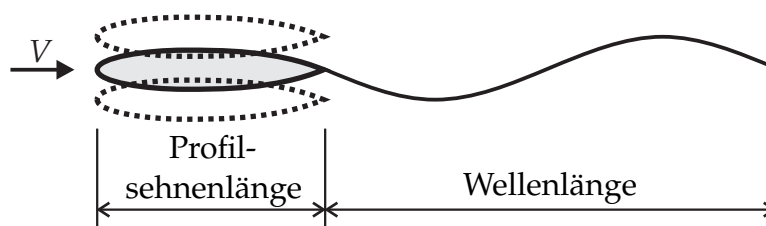
rend, vgl. TRAUPEL [97, S. 450]. TRAUPEL [97] entwickelte die Bewegungsgleichungen für dieses Problem und erkannte die Strouhalzahl als entscheidende Größe für das Auftreten von selbsterregten Schaufelschwingungen. Die Strouhalzahl ist definiert durch

$$St = f_{St} \frac{\text{Profilschneidlänge}}{V} \quad (2.1)$$

und ist eine dimensionslose Kennzahl in der Strömungsmechanik, mit der die Wirbelablösefrequenz  $f_{St}$  der Wirbelbildung an umströmten Strukturen bestimmt werden kann, vgl. VON KÁRMÁN [41]. Neben der Profilschneidlänge und der Wirbelablösefrequenz ist die Strouhalzahl durch die Geschwindigkeit  $V$  der Anströmung definiert. Eine ähnliche dimensionslose Kenngröße, die zur Beurteilung der Flatteranfälligkeit von umströmten Profilen verwendet wird, vgl. CARTA [10, S. 392], ist die sogenannte reduzierte Frequenz

$$k = \omega_k \frac{\text{Profilschneidlänge}}{2V} = \pi \frac{\text{Profilschneidlänge}}{\lambda} \quad (2.2)$$

Gl. (2.2) lässt sich nach **Bild 2.4** als Schaufel- bzw. Flügelprofil veranschaulichen, das mit einer Frequenz  $\omega_k$  oszilliert, sodass mit einer Anströmungsgeschwindigkeit  $V$  eine Nachlaufströmung mit der Wellenlänge  $\lambda$  erzeugt wird. Das Verhältnis von Profilschneidlänge zu der Wellenlänge des Nachlaufs bestimmt die reduzierte Frequenz  $k$  und damit die Gefahr einer Flatterschwingung.

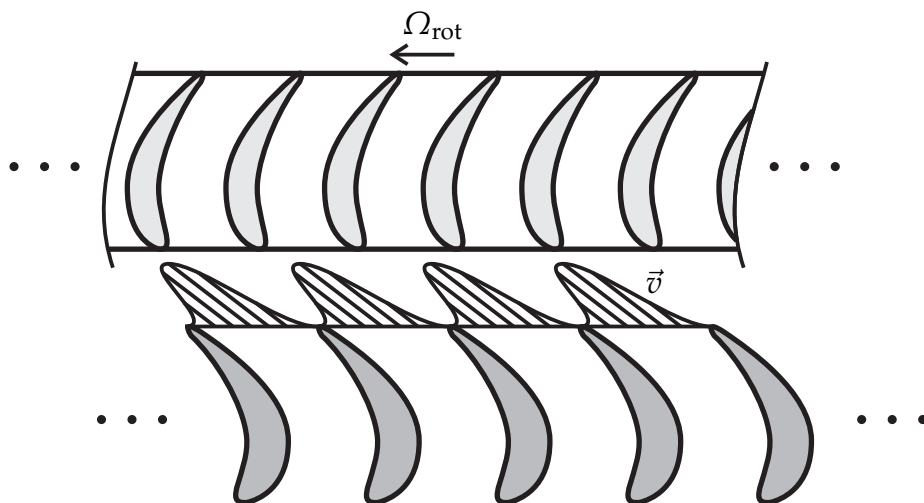


**Bild 2.4:** Veranschaulichung der reduzierten Frequenz nach CARTA [10, S. 392]

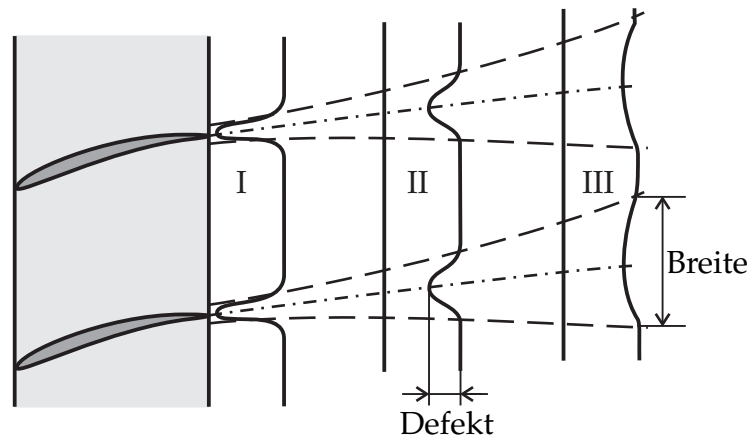
## 2.1.2 Fremderregte Schaufelschwingungen

Bei der Auslegung von Beschaufelungen sind periodisch auftretende äußere Kräfte von Bedeutung, weil eine von diesen Kräften hervorgerufene Schwingung nicht abklingt. Da das angeregte System mit der Frequenz der Anregung antwortet, sind insbesondere Anregungsfrequenzen im Bereich von Eigenfrequenzen des Systems kritisch, welche zu stark überhöhten Schwingungsantworten führen können. Wie in Abschnitt 2.1.1 ist auch bei den fremderregten Schaufelschwingungen in Strömungsmaschinen die Fluid-Struktur-Kopplung Hauptursache der Anregung. Fluktuierende Gas- bzw. Dampfkkräfte lassen sich in Erregerkräfte einteilen, deren Frequenz entweder an die Rotordrehzahl gekoppelt ist oder die nicht drehzahlharmonisch sind. Nachfolgend sind die wichtigsten Arten der Fremderregung von Beschaufelungen zusammengefasst.

Die Beanspruchung der Schaufeln aufgrund ungleichförmiger Strömung über den Umfang stellt eine Hauptursache für periodische Schaufelanregungen dar. Leitschaufeln im Gehäuse sind durch ihre Aufhängung und vorhandene Dichtungen vergleichsweise gut gedämpft und weniger gefährdet, als Rotorschaukeln, vgl. LECHNER & SEUME [52, S. 588]. LECHNER & SEUME [52] beschreiben die Düsenanregung der von Schaufelkränzen, bei der die Nachlaufdüsen der vorgeschalteten Leitschaufelreihe eine periodische Erregung verursacht, deren Frequenz von der Drehfrequenz abhängt. Die Anzahl der Nachlaufdüsen multipliziert mit der Drehzahl ergibt die Anregungsfrequenz, die fern von Resonanzfrequenzen der Schaufeln liegen sollte. Eine anschauliche Darstellung der Düsenanregung nach PANNING [64] ist in **Bild 2.5** gezeigt. Es lässt sich anhand dieser vereinfachten Skizze erkennen, dass die Erregerkräfte für benachbarte Schaufeln einen Phasenversatz aufweisen, welcher durch die Anzahl der Leit- und Laufschaufeln bedingt ist. Nach TRAUPEL [97, S. 445] ist die Anregung durch Nachlaufdüsen an Schaufelkranzstufen die für die Praxis wichtigste Form der Fremderregung in Turbomaschinen.



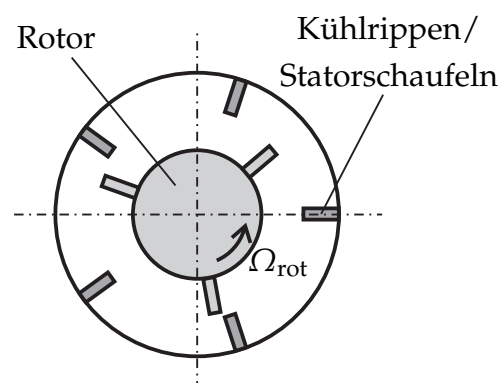
**Bild 2.5:** Schematische Darstellung der Düsenanregung zwischen Leit- und Laufschaufeln in Strömungsmaschinen nach PANNING [64]



**Bild 2.6:** Darstellung der Nachlaufströmungsverteilung hinter einer Verdichterschaufelreihe mit Geschwindigkeitsprofilen in drei verschiedenen Abständen zu den Schaufelhinterkanten nach GALLUS [29]

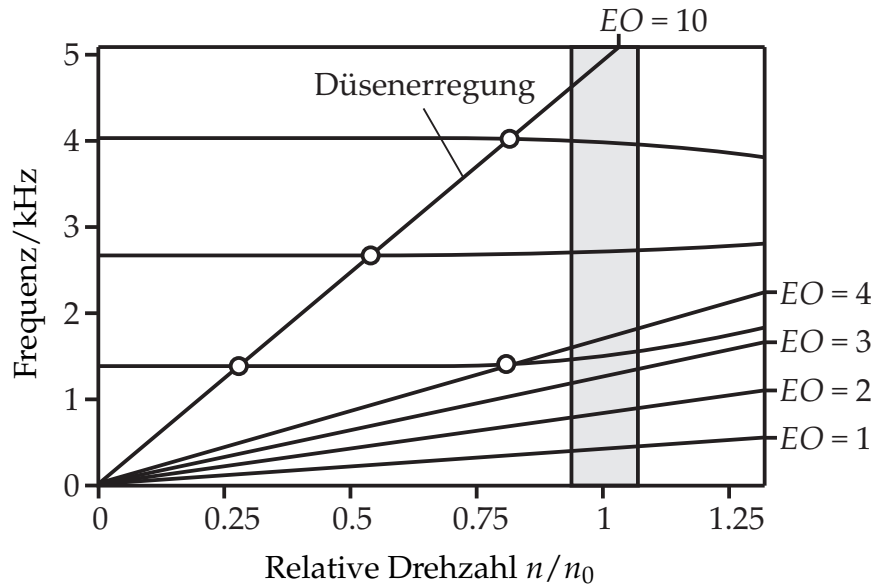
GALLUS [29] untersuchte ebenfalls die Erregerkräfte an relativ zueinander bewegten Schaufelgittern und erklärte, dass die Form der Nachlaufdellen stark vom Abstand der angeregten Schaufel zur Leitschaufelreihe abhängt, vgl. **Bild 2.6**. Das Gebiet der turbulenten Strömung vergrößert sich mit axialem Abstand zu den Schaufeln, bis sich die als Defekt bezeichneten Geschwindigkeitsdellen hinter dem Bereich III verbinden. Die Geschwindigkeitsverteilung enthält mit größer werdender Breite der Nachlaufdelle verstärkt niederfrequente Anteile, sodass mit dem Abstand die Anfachung der gefährlicheren ersten Harmonischen verstärkt werden kann, auch wenn der Defekt kleiner wird, vgl. GALLUS [29, S. 129].

DUBAS [19] analysierte die Anregung, die aufgrund der Periodizität von Lauf- und Leitschaufeln in Strömungsmaschinen auftreten, mit dem in **Bild 2.7** gezeigten Modell. Die Schaufeln des elastisch modellierten Rotors erfahren Erregerkräfte, wenn sie sich an den Statorschaufeln vorbei bewegen, sodass die Frequenzanteile der periodischen Anregung durch die Drehzahl  $\Omega_{\text{rot}}$  und die Anzahl der Statorschaufeln vorgegeben ist. Da sich die Kräfte an allen Schaufeln eines Rotors summieren, können abhängig von der Zahl der



**Bild 2.7:** Modell zur Beschreibung der Wechselwirkung zwischen Stator- und Rotorelementen bei Rotation nach DUBAS [19]





**Bild 2.8:** Schematische Darstellung eines Campbell-Diagramms, vgl. HANDBOOK OF TURBOMACHINERY [53]

Leit- bzw. Laufschaufeln nur bestimmte Schwingungsformen angeregt werden. Neben der notwendigen Resonanzbedingung, welche die Erregerfrequenz der Eigenfrequenz gleichsetzt, ist deshalb zusätzlich eine Bedingung für die Anregbarkeit notwendig. Für gleichmäßig verteilte Schaufelanordnungen ermittelt DUBAS [19] die Existenzbedingungen für Wellen- und Scheibenschwingungen.

Nach LECHNER & SEUME [52] ist ein resonanzfreier Betrieb nahezu nicht möglich, weil Vielfache der Rotordrehzahl mit Eigenformen der Schaufel, bzw. des Schaufelkranzes zusammenfallen können. Bei der Wahl der Leitschaufelzahl sollte daher im Auslegungsprozess darauf geachtet werden, dass vergleichsweise schlecht anregbare Eigenformen der Struktur im Bereich der Betriebsdrehzahl liegen, vgl. LECHNER & SEUME [52, S. 588].

Im Auslegungsprozess eines Schaufelkranzes lässt sich ein Campbell-Diagramm erstellen, in dem die Verläufe der drehzahlharmonischen Anregung und der Eigenfrequenzen der Struktur in Abhängigkeit über die Rotordrehzahl aufgetragen werden, vgl. **Bild 2.8**. Zentrifugalkräfte können je nach Schwingungsform und Schaufelgeometrie zu einer Frequenzerhöhung oder zu einer Frequenzabnahme mit der Drehzahl führen. Wärmeeinträge bewirken zudem eine Steifigkeitsreduktion und damit verbunden eine Abnahme der Eigenfrequenzen. Die sogenannten Drehzahlharmonischen sind proportional an die Rotordrehzahl gekoppelte Anregungsfrequenzen und verlaufen durch den Ursprung. Die Anregungskreisfrequenz  $\Omega_{Er}$  ergibt sich mit der Erregerordnung  $EO$  und der Rotationskreisfrequenz  $\Omega_{rot}$  zu

$$\Omega_{Er} = EO\Omega_{rot}. \quad (2.3)$$

Die Erregerordnung der ersten Harmonischen einer Düsenerregung entspricht damit der Schaufelzahl des vorgeschalteten Leitschaufelgitters. Im stationären Betrieb mit Drehzahl  $n = n_0$  sollte keine kritische Schaufeleigenform resonant angeregt werden.

## 2.2 Dämpfung und Stabilisierung von Schaufelschwingungen

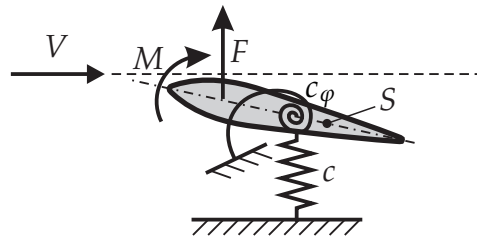
Je nach Art der Schwingungsanregung haben sich in der Praxis Methoden bewährt, diese so zu beeinflussen, dass ein sicherer Betrieb möglich ist und die Gefahr des Ausfalls einer Maschine minimiert wird. Im Folgenden sind wissenschaftliche Veröffentlichungen und weiterführende Literatur zur Dämpfung und Stabilisierung von Schaufelschwingungen gegeben. Neben dem Einfluss von bewusster und stochastischer Schaufelverstimmung auf die Fluid-Struktur-Kopplung steht die passive Dämpfung durch Fügstellen, die auch als Reibungsdämpfung bezeichnet wird, im Fokus der Literaturübersicht.

### 2.2.1 Flutterstabilisierung durch Verstimmung

EKICI ET AL. [21] zeigten, dass eine Verstimmung der Schaufeln bezüglich ihrer Geometrie und die damit verbundenen Auswirkungen auf die Aerodynamik destabilisierend sein können. Untersucht wurde das als *blending* bezeichnete Verfahren des Materialabtrags, das in erster Linie zur Unterdrückung von Rissausbreitungen dient. Die veränderten Schaufelgeometrien wurden dabei durch Abweichungen in den Koeffizienten für die aerodynamischen Kräfte modelliert. Eine alternierendes *blending* an den Schaufelvorderkanten führte in den Berechnungen zu einer erhöhten Gefahr von Flatterschwingungen. Eine reine Verstimmung der Schaufeleigenfrequenzen ohne Beeinflussung der Geometrie wirkte sich hingegen positiv auf die aeroelastische Stabilität aus.

In einer weiteren Arbeit beschäftigten sich EKICI ET AL. [20] mit der alternierenden Verstimmung der Schaufelanstellwinkel (*stagger angle*) benachbarter Segmente zur Flutterstabilisierung. Eine bewusste Verstimmung der Anstellwinkel und die damit verbundene veränderte Anströmung wirkt sich je nach Richtung der Winkeländerung gegenüber der Nominallage positiv oder negativ auf die Stabilität aus. Eine Erhöhung des Anstellwinkels jeder zweiten Schaufel um  $5^\circ$  gegenüber der Nominallage von  $49,5^\circ$  führte in dem Modell einer Verdichterstufe zu einer Destabilisierung. Eine Verringerung um  $5^\circ$  zeigte jedoch eine leicht erhöhte aerodynamische Dämpfung.

KIELB ET AL. [46] untersuchten die Möglichkeit der Flutterstabilisierung durch aerodynamische Verstimmung. Für ihre Untersuchungen verwendeten die Autoren einen Modellansatz nach FEINER & GRIFFIN [23], der als *Fundamental Model of Mistuning* (FMM) bekannt ist und bei dem nur eine Schwingungsfamilie mit einer dominanten Eigenform der Schaufel berücksichtigt wird. Die Verstimmungsfaktoren können unabhängig von ihrer physikalischen Ursache in diesem Modell in einer aerodynamischen Koeffizientenmatrix angeordnet werden. KIELB ET AL. fanden eine Flutterstabilisierung bei alternierender Anordnung der Koeffizienten, was laut Aussage der Autoren vergleichbar mit dem Effekt einer reinen Frequenzverstimmung ist.

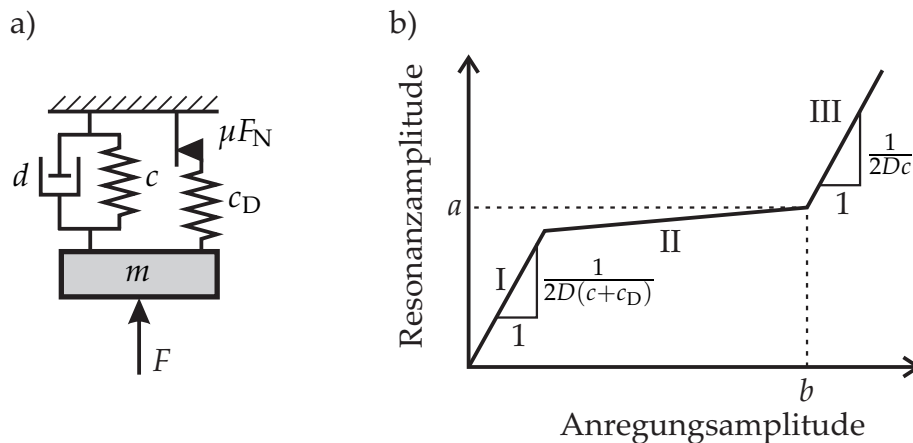


**Bild 2.9:** Modelldarstellung für die Untersuchung von Flatterschwingungen durch Modenkopplung nach KAZA & KIELB [42]

KAZA & KIELB [42] analysierten den Einfluss von Schaufelverstimmungen auf Flattern an einer Verdichterstufe mit 56 Schaufeln unter Berücksichtigung aeroelastischer Kräfte und Momente. Jede Schaufel des Kranzes wurde mit dem Modell in **Bild 2.9** durch zwei Freiheitsgrade beschrieben und repräsentiert den Profilquerschnitt. Die aeroelastische Kopplung zwischen den Schaufeln wurde nach der Theorie von WHITEHEAD [98] für Kaskaden modelliert. Die Autoren konnten für eine Parameterkonfiguration mit Flattergefahr zeigen, dass sich durch alternierende Verstimmung der Schaufeleigenfrequenzen bereits ab einem Wert von 1% für die Frequenzverstimmung eine Stabilisierung einstellt. Während die effektive Dämpfung gefährdeter Schwingungsformen durch die Verstimmung anstieg, verringerten sich jedoch die aerodynamische Dämpfungswerte bereits stabiler Schwingungsformen. Weiterhin untersuchten KAZA & KIELB [42], vgl. auch KIELB & KAZA [47], den Einfluss von alternierender Verstimmung und stochastischer Verstimmung auf die Schwingungsantwort des harmonisch angeregten Systems. Für eine Erregerordnung von  $EO = 11$  führten beide Arten der Verstimmung zu geringeren Schwingungsantworten, als im Fall des unverstimmten Ausgangssystems. Mit einer Erregerordnung  $EO = 39$  wurden für beide Arten der Verstimmung deutlich höhere Amplituden, als ohne Verstimmung beobachtet. Die aeroelastische Kopplung der Schaufeln kann sich abhängig von der Anregung positiv auf die Schwingungsantwort auswirken.

SCHOENENBORN [84] untersuchte ebenfalls den Einfluss einer A-B-Anordnung von Schaufeln mit aeroelastischer Kopplung und zeigte, dass die Eigenwerte zur Beschreibung der aerodynamischen Dämpfung in den stabilen Bereich verschoben werden können. Die Auswirkungen auf die Frequenzantworten bei Fremderregung waren dabei, wie auch bei KAZA & KIELB [42], abhängig von der Erregerordnung.

PETROV [70, 71] berücksichtigte in seinen Simulationen die aus separaten Fluidsimulationen erhaltenen aeroelastischen Kräfte und konnte das Phänomen der Amplitudenreduktion durch eine Verstimmung bestätigen. Für niedrige Erregerordnungen ergaben sich mit stochastischer Verstimmung geringere Frequenzantworten, als im Falle des unverstimmten Ausgangsmodells. Mit einer stochastischen Verstimmung können durch eine Erregerordnung alle Schwingungsformen des Schaufelkranzes angeregt werden. Die Amplitudenreduktion durch Verstimmung wurde auf ein höheres Dämpfungspotential der zusätzlich angeregten Schwingungsformen zurückgeführt, mit dem eine höhere Dämpfung des Gesamtsystems folgt.



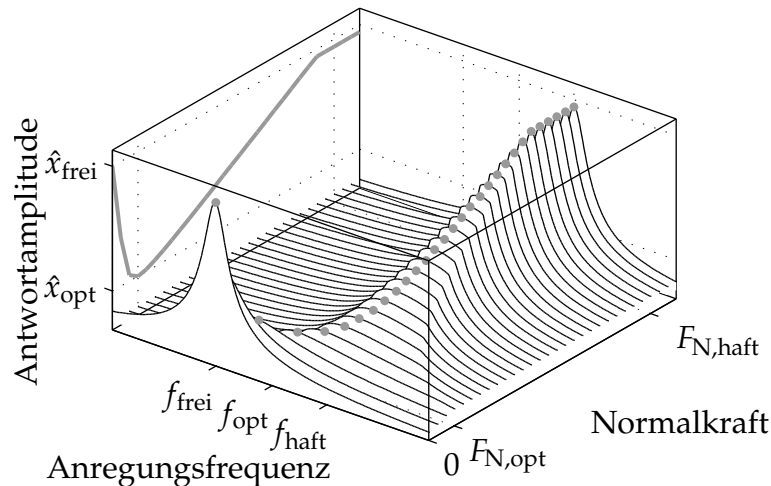
**Bild 2.10:** Ersatzmodell mit einem Freiheitsgrad für die Schwingungsanalyse reibungs-gedämpfter Strukturen, vgl. CAMERON ET AL. [7] und SINHA & GRIFFIN [89]; a) Darstellung des Ersatzmodells bestehend aus linearer Grundstruktur mit Elasto-Gleit-Kontakt; b) Dämpfungsleistungsdiagramm nach CAMERON ET AL. [7] mit Dämpfungsgrad  $D = \frac{d}{2\sqrt{cm}}$

Die alternierende Verstimmung von Schaufeln zur Reduktion der Flattergefahr in Strömungsmaschinen ist ein verbreitet eingesetztes Verfahren. Es gibt bereits erteilte und aktuell eingereichte Patente, die sich mit der praktischen Umsetzung beschäftigen, vgl. KULINA [49], ZARIMAHALLEH ET AL. [104], KELLY ET AL. [43] und MONTGOMERY ET AL. [56, 57].

## 2.2.2 Schwingungsdämpfung durch Reibelemente

Der Reibkontakt und die damit verbundene Energiedissipation wird im Bereich der Turbomaschinen genutzt, um Schwingungen zu dämpfen. Durch Relativbewegung hervorgerufene Reibkräfte führen zu einer Umwandlung eines Teils der Schwingungsenergie in Wärme. Häufig werden Reibelemente zwischen benachbarten Schaufeln eingesetzt, welche durch Fliehkräfte an den Schaufelfußbereich gepresst werden und zusätzlich eine Dichtungsfunktion aufweisen, vgl. LECHNER & SEUME [52, S. 580].

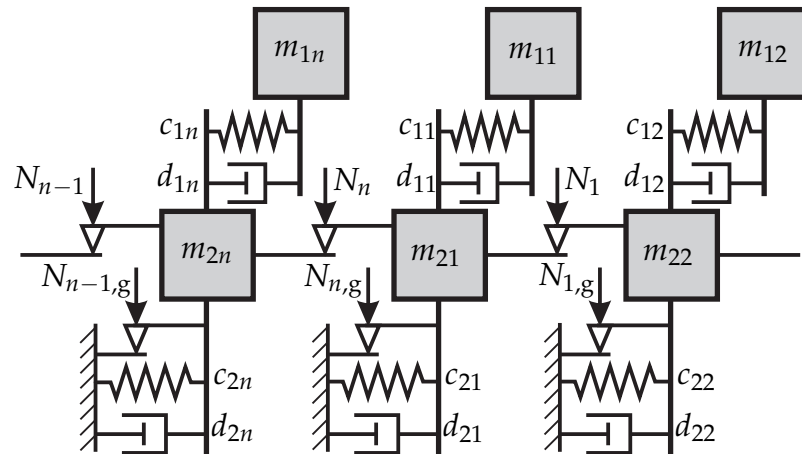
Zur optimalen Auslegung von Reibelementen sind zahlreiche numerische und experimentelle Untersuchungsergebnisse veröffentlicht. GRIFFIN [33] analysierte den Einfluss der Relativbewegung auf die Dämpfungsleistung und schlussfolgerte, dass Reibelemente bei gegenphasiger Bewegung der Schaufeln ein Maximum an Energiedissipation erreichen. Für eine gegebene Schwingungsform bzw. gegebenen Phasenversatz benachbarter Schaufeln muss die Masse eines Reibelements für eine optimale Dämpfung angepasst werden. CAMERON ET AL. [7] entwickelten mit dem in **Bild 2.10 a)** dargestellten Minimalmodell ein Dämpfungsleistungsdiagramm zur Reibelementauslegung für eine harmonische Anregung, vgl. **Bild 2.10 b)**. Eine Variation der Reibelementmasse ist in Form einer Veränderung der Kontaktnormalkraft in dem Modell berücksichtigt. Das Diagramm



**Bild 2.11:** Amplitudengänge des Schwingers aus **Bild 2.10 a)** bei Variation der Kontaktnormalkraft

beschreibt schematisch den Verlauf der Resonanzamplitude über der Anregungsamplitude. Der mit I gekennzeichnete Bereich bezieht sich auf das vollständige Haften des Kontaktelements und die stationäre Antwort des Systems wird durch die Gesamtsteifigkeit  $c + c_D$  bestimmt. Für den Bereich II liegt eine effektive Reibungsdämpfung mit geringer Veränderung der Schwingungsantwort vor und für hohe Anregungsamplituden nähert sich das Systemverhalten bei Vernachlässigung der Reibung dem linearen Verlauf in Bereich III an. Für die Praxis wird der Übergang von Bereich II zu Bereich III von den Autoren als obere Grenze bei der Auslegung vorgeschlagen, sodass noch eine ausreichende Dämpfungswirkung vorliegt. In **Bild 2.11** sind die Frequenzantworten des in **Bild 2.10 a)** gezeigten Modells für eine feste Anregungsamplitude unter Variation der Kontaktnormalkraft dargestellt. Für eine harmonische Anregung liegt die niedrigste Schwingungsantwort des Systems zwischen den Grenzfällen des freien und des vollständig haftenden Kontakts vor. Das Modell kann mit nur einem Freiheitsgrad zusätzlich durch den nichtlinearen Kontakt angeregte Schaufelschwingungsformen nicht abbilden, weshalb CAMERON ET AL. [7] einen geringen Einfluss der Reibkräfte auf die abzubildende Schwingungsform voraussetzten und PATSIAS [67] für Reibelemente in experimentellen Untersuchungen beobachten konnte.

MUSZYNSKA & JONES [59] entwickelten ein Mehrkörpermodell mit COULOMB-schem Reibkontakten zur Beschreibung von Schaufelschwingungen mit Verstimmung, wie es in **Bild 2.12** dargestellt ist. Neben der relativen Reibkopplung zwischen benachbarten Schwingern wird eine nichtlineare Kopplung zwischen Schaufel- und Scheibenstruktur berücksichtigt. Die Autoren verwendeten zur Bestimmung einer Näherungslösung das Verfahren der Harmonischen Balance und zeigen, dass dem Verhältnis von Reibkraft zu Erregerkraft eine entscheidende Bedeutung bei der Auslegung der Reibungsdämpfung zukommt. Weiterhin wurde beobachtet, dass die Dämpfungswirkung durch Reibung in dem verstimmten System von dem Phasenversatz der Anregung abhängt und bei der Auslegung berücksichtigt werden muss.

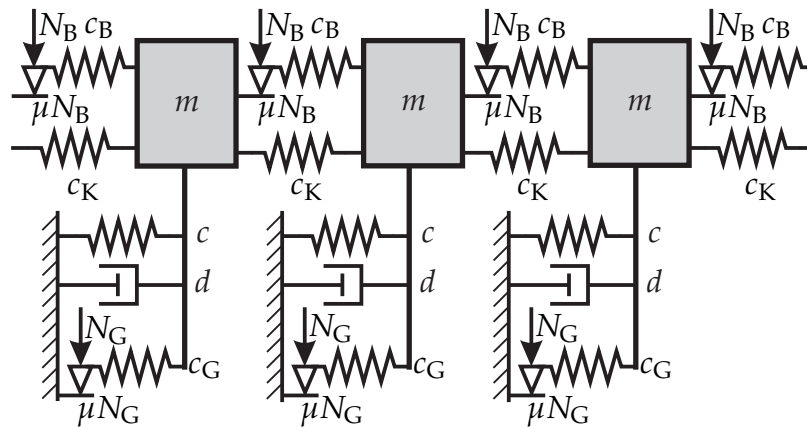


**Bild 2.12:** Mehrkörpermodell für einen Schaufelkranz mit COULOMB-schem Reibkontakt, vgl. MUSZYNSKA & JONES [59]

DOMINIC [17] untersuchte einen Schadensfall an einer Hochdruckkraftstoffpumpe für ein Space Shuttle, bei der zu schwer ausgeführte Reibelemente zu vollständigem Haften ohne Energiedissipation führten. Die Schaufeln erlitten daraufhin Risse, die durch starke Schwingungen des Schaufelblattes oberhalb des Reibkontakts entstanden. DOMINIC verwendete das von MUSZYNSKA & JONES [59] entwickelte Modell (**Bild 2.12**) zur Optimierung der Reibelemente, für das die Parameter durch Messungen der ersten Schaufelbiegeschwingung, sowie der Schaufelblattschwingung mit haftendem Reibelement identifiziert wurden. Die Reibelemente konnten auf Basis der Berechnungen erfolgreich modifiziert werden und führten zu einer verbesserten Dämpfungswirkung.

Nach KIELB ET AL. [44] tritt Flattern typischerweise an Niederdruckstufen von Turbinen mit vergleichsweise langen und dünnen Schaufelprofilen auf. Die Niederdruckschaufeln können mit dem Ziel struktureller Versteifung durch Deckbänder gekoppelt werden, wobei die Auslegung in der Regel nicht mit dem Ziel der Reibungsdämpfung erfolgt.

SINHA & GRIFFIN [89] untersuchten mit dem in **Bild 2.10 a)** gezeigten Ersatzmodell nach CAMERON ET AL. [7] die Möglichkeit Flatterschwingungen gezielt durch die Dämpfungswirkung von Reibkontakten zu reduzieren. Die Autoren berücksichtigten eine Anfachung des Systems durch einen negativen Dämpfungskoeffizienten und bestimmten eine Näherungslösung mit der Harmonischen Balance Methode. Das selbsterregungsfähige System besitzt einen stabilen Grenzzykel, bei dem dissipative Anteile die Anfachung ausgleichen, sowie eine Stabilitätsgrenze für die Anfangsauslenkung, ab der die Reibung zur Stabilisierung nicht mehr ausreicht. Wird das System zusätzlich fremderregt entsteht eine Überlagerung der angeregten Schwingung mit der selbsterregten Schwingung und die Harmonische Balance Methode kann nur auf den Resonanzfall angewendet werden, für den die Eigenfrequenz der Anregungsfrequenz entspricht. Die Autoren stellten heraus, dass sich die Stabilitätsgrenze des Systems durch eine harmonische Anregung verringert, womit die Reibungsdämpfung zur Flutterstabilisierung fremderregter Systeme nur begrenzt geeignet ist.



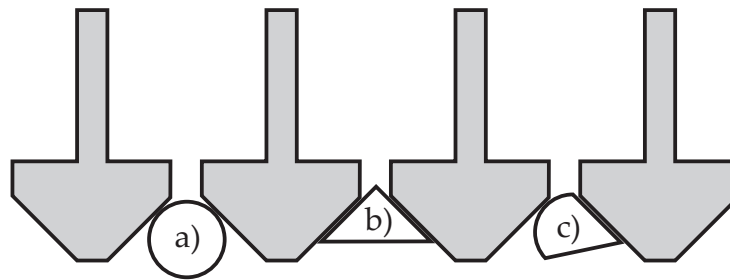
**Bild 2.13:** Schwingerkette aus Segmenten mit einem Freiheitsgrad nach SINHA & GRIFFIN [90], bzw. SINHA, GRIFFIN & KIELB [91]

In folgenden Arbeiten von SINHA & GRIFFIN [90] sowie SINHA, GRIFFIN & KIELB [91] wurde die Stabilität von Schwingerketten nach **Bild 2.13** mit negativer Dämpfung und Reibungskopplung untersucht. Jedes Segment wurde mit aerodynamischen Ersatzkräften für eine inkompressible Strömung beaufschlagt, vgl. ADAMCZYK [1] und WHITEHEAD [98], und die Dämpferkonfiguration *blade to blade* (Reibkontakt zwischen benachbarten Schaufeln) mit der Dämpferkonfiguration *blade to ground* (Reibkontakt zwischen Schaufel und Scheibe) verglichen. Die *blade to ground* Anordnung zeigte dabei ein größeres Potential Flattern zu stabilisieren, weil deren Dämpfungswirkung im Gegensatz zur *blade to blade* Konfiguration nicht mit Phasenversatz zwischen den Schaufeln anwächst, sondern unabhängig davon ist. Da Flutterstabilitätsgrenzen in der Regel für geringe Werte des Phasenversatzes vorliegen können Reibelemente zwischen benachbarten Schaufeln nur begrenzt zur Flutterstabilisierung beitragen.

CORRAL ET AL. [15] untersuchten ebenfalls die Frequenzantworten eines Mehrmassenschwingermodells mit Fremderregung und negativer Dämpfung. Jedes Schaufelkranzsegment wurde mit drei Massen, die über lineare Federn gekoppelt sind, sowie einem analytisch beschriebenen Mikroschlupfkontaktmodell modelliert. Aerodynamische Dämpfungswerte wurden für mehrere Schwingungsformen negativ gesetzt, sodass die Schwingungsantwort neben der Frequenz der Anregung noch weitere Frequenzanteile enthalten kann. Die Autoren beobachteten bei ihren Untersuchungen, dass die Flatterschwingung abhängig von der Erregerordnung und der Anregungsamplitude durch eine der instabilen Schwingungsformen dominiert wird. Bei einer Annäherung der Anregungsfrequenz an die Flutterfrequenz synchronisieren sich diese Schwingungsanteile und die Flatterschwingung wird zunehmend durch die Reibungsdämpfung unterdrückt.

Genauere Untersuchungen hinsichtlich des nichtlinearen Schwingungsverhaltens und der Kinematik von Reibelementen werden durch Messungen an Modellen und verfeinerte Simulationen ermöglicht. Eine schematische Darstellung verschiedener Reibelementgeometrien ist in **Bild 2.14** gegeben. GOLA ET AL. [31] entwickelten einen Prüfstand zur Analyse der Kinematik von keilförmigen Reibelementen, mit dem Ziel der Bewertung





**Bild 2.14:** Schematische Darstellung verschiedener Reibelementgeometrien; a) Zylinderförmiges Reibelement; b) Keilförmiges Reibelement; c) Asymmetrisches Reibelement

gängiger Kontaktmodelle. Für gleiche Anfangsbedingungen wurden abweichende Bewegungen des Reibkörpers beobachtet, jedoch konvergierten die durchgeführten Messungen zu einer minimalen Reibhysterese. FIRRONE ET AL. [24] untersuchten ein zylinderförmiges und ein keilförmiges Reibelement in einem Standversuch mit zwei Modellschaufeln und konnten jeweils Probleme bei der Reibelementbewegung feststellen. Die Dämpfungswirkung des zylindrischen Reiblements ist durch ein Abrollen bei gleichphasiger Biegeschwingung der Schaufeln eingeschränkt und das keilförmige Element kann eine nichteindeutige Kontaktdruckverteilung mit Separation und Klappern aufweisen. PANNING ET AL. [66] führten Simulationen mit unterschiedlichen Reibelementgeometrien durch und bestätigten die von FIRRONE ET AL. [24] beobachteten Phänomene bei zylinderförmigen und keilförmigen Reibelementen. Nach SANLITURK ET AL. [81] ist auch bei keilförmigen Reibelementen im Bereich niedriger Phasenversatzwinkel benachbarter Schaufeln eine Form von Abrollbewegung möglich. Reibelemente werden aufgrund der Nachteile von Zylinder- und Keilform auch asymmetrisch ausgeführt, vgl. **Bild 2.14** c), sodass eine eindeutige Position des Körpers zwischen den Schaufelplattformen gewährleistet ist, vgl. ZUCCA ET AL. [106] und PANNING ET AL. [64].

Keilförmige Reibelemente werden häufig in Turbomaschinen eingesetzt und in vielen Arbeiten numerisch und experimentell untersucht, vgl. YANG & MENQ [102, 103], SANLITURK ET AL. [81], BORRAJO ET AL. [3], PETROV & EWINS [73] und ZUCCA ET AL. [105]. Tritt keine Separation im Kontakt auf, so ist nach JARELAND [38] für Simulationen der Dynamik die einfache Harmonische Balance Methode als Näherung ausreichend. Auch CIGEROGLU ET AL. [12, 13] betonten, dass die einfache HBM für den geschlossenen Kontakt bei Reibelementen zur Berechnung der Reibungsdämpfung hinreichend genau ist und höherharmonische Anteile nur geringen Einfluss auf das Ergebnis haben.

PETROV [73, 69] modellierte das Reibelement als dreidimensionalen elastischen Körper mit der Finite Elemente Methode und verwendete für die Lösung im Frequenzbereich die Methode der Harmonischen Balance mit höherharmonischen Anteilen. Der Kontakt wurde jeweils zwischen zwei Knoten der Finite Elemente Netze von Schaufel und Reibkörper über ein dreidimensionales Punktkontaktmodell realisiert. Auch PANNING [64] verwendete eine diskrete Verteilung von räumlichen Punktkontaktmodellen zur Beschreibung des flächigen Kontakts zwischen Reibelement und Schaufel. Jeder Punktkontakt wur-



de dabei durch das von SEXTRO [85] entwickelte dreidimensionale Kontaktmodell beschrieben. Mit in der Kontaktzone verteilten Kräften können Mikroschlupfeffekte bei der Berechnung der Energiedissipation im Reibkontakt berücksichtigt werden.

BOTTO ET AL. [5] erklärten, dass die Ruhelage der Reibkörper zwischen zwei Schaufelplattformen nicht eindeutig ist und nur durch eine Annahme in der Modellierung des Reibelementkontakts bestimmt werden kann. Die Reibelemente werden mit der Fliehkraft zwischen zwei Schaufeln gepresst und können dabei tangentiale Spannungen in beiden Kontaktzonen aufbauen. Unter der Voraussetzung einer stationären Schwingungsantwort um die Ruhelage ist eine getrennte statische und dynamische Rechnung möglich. PANNING ET AL. [65] nahmen für die Berechnung der Gleichgewichtslage einen reibungsfreien Kontakt an und bestimmten so den statischen Anteil der Kontaktnormalkräfte. Tangentiale Kräfte wurden in der nachgeschalteten dynamischen Analyse ohne Rückwirkung auf die statischen Kräfte bestimmt. PETROV & EWINS [72] nahmen für die statischen Analyse den Grenzwert  $\mu F_N$  für die Tangentialkräfte an, womit ein verspannter Kontakt entgegen der Fliehkraft beschrieben wird. Die resultierenden Normalkräfte, die als statische Referenz für die folgenden dynamischen Rechnungen dienen, unterscheiden sich von den Ergebnissen von PANNING ET AL. [65] und führen zu abweichenden Frequenzantworten. FIRRONE ET AL. [26, 25, 27] verglichen die Annahmen von PANNING ET AL. [65] und PETROV & EWINS [72] mit einer gekoppelten statischen und dynamischen Berechnung, bei der die Gleichungen der statischen Rechnung simultan mit der Schwingungsantwort in jedem Frequenzschritt gelöst werden. Statische Kontaktspannungen werden so abhängig von der Historie der Reibelementbewegung in der Analyse variabel berücksichtigt. Abweichungen in der Schwingungsantwort wurden hauptsächlich bei gleitendem Kontakt festgestellt, was nach FIRRONE ET AL. durch den Einfluss der statischen Kraftkomponenten auf die Grenzen des Haft-Gleit-Übergangs zurückzuführen ist. ZUCCA ET AL. [108] untersuchten ebenfalls die gekoppelte statische und dynamische Rechnung und beobachteten, dass eine entkoppelte Berechnung das Dämpfungsvermögen von keilförmigen Reibelementen überschätzen kann. Weiterhin konnten ZUCCA ET AL. [107] zeigen, dass bei kurzzeitiger Separation eine entkoppelte Berechnung mit der Annahme tangentialer Vorspannungen, wie bei PETROV & EWINS [72], zu falschen Ergebnissen führt, da der Abbau dieser Spannungen nicht berücksichtigt wird.

MURTHY & MIGNOLET [58] untersuchten die Möglichkeit einer bewussten Verstimmung von Reibelementen und deren Auswirkung auf das Dämpfungsvermögen. Die Autoren motivierten ihre Arbeit mit Messungen von GÖTTING ET AL. [32], bei denen eine alternierende Verstimmung der Reibelementmassen zu 2% niedrigeren Amplituden führte, als die zuvor bestimmte optimale Dämpfermasse ohne Verstimmung. MURTHY & MIGNOLET [58] verwendeten ein Mehrmassenmodell mit einem Freiheitsgrad für jedes Segment und Elasto-Gleit-Kontaktelemente. Die Verstimmung der Dämpfermassen wurde in der Modellierung durch eine Veränderung der Kontaktnormalkraft berücksichtigt. Ein höheres Dämpfungsvermögen durch Verstimmung, wie bei GÖTTING ET AL. [32], konnten die Autoren in der Simulation nicht nachweisen.

## 2.3 Modellierung und Analyse

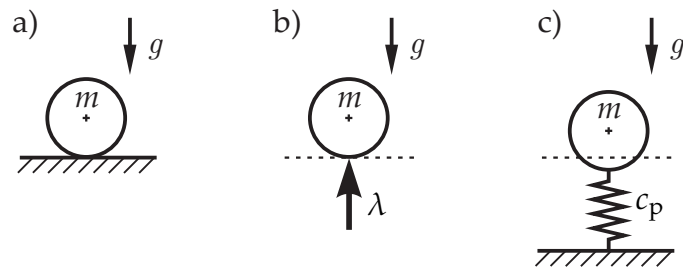
Die Modellierung der dynamischen Eigenschaften realer Bauteile erfordert eine Abstraktion des physikalischen Ausgangssystems. Wesentliche Effekte müssen auch nach vereinfachenden Annahmen erhalten bleiben. Neben einer Modellreduktion durch zyklische Randbedingungen sind Kontakt- und Dämpfungsmodelle nur schwierig messtechnisch zu validieren und gehen oft mit vereinfachenden Annahmen einher. Die für die Modellierung reibungsgekoppelter Turbinenschaufeln wichtigen Aspekte und gängigen Modellannahmen werden im Folgenden beschrieben.

### 2.3.1 Kontaktmodellierung und Analyse im Frequenzbereich

Der Kontakt zwischen zwei Körpern ruft Kräfte hervor, die ein Durchdringen der Körper verhindern. Bei rauen Oberflächen entstehen zusätzlich Tangentialkräfte mit möglichen Haft- und Gleitzuständen der Kontaktpartner. Neben diesen wesentlichen Eigenschaften des technischen Kontakts stellen unter anderem Temperaturänderungen, plastische Verformungen oder Abrieb Einflüsse dar, welche je nach Anwendungsfall in einem Kontaktmodell berücksichtigt werden müssen. Eine ausführliche Behandlung dieses Themengebiets und weiterführende Literatur ist in POPOV [77], JOHNSON [40] und WRIGGERS [100] zu finden.

Nach WRIGGERS [100, S. 21] kann ein System mit Kontaktvorgängen unterschiedliche Zustände annehmen. Die Zwangsbedingungen für den Kontakt führen auf veränderliche Dimensionen des zugehörigen diskretisierten Problems. Durch die Einführung von LAGRANGE-Multiplikatoren können die Kontaktrandbedingungen exakt eingehalten werden. Die Multiplikatoren repräsentieren die Kontaktkräfte und erweitern als zusätzliche Variablen das zu lösende Problem. Das sogenannte strukturvariante System kann in der Ebene in ein lineares Komplementaritätsproblem überführt werden, vgl. PFEIFFER & GLOCKER [74]. Insbesondere bei Kontaktproblemen mit Stoßvorgängen sind aufgrund kurzer Stoßdauern und Wellenausbreitung passende Algorithmen zu verwenden, sowie wegen großer Kräfte nichtlineares Materialverhalten zu berücksichtigen, vgl. WRIGGERS [100, S. 28].

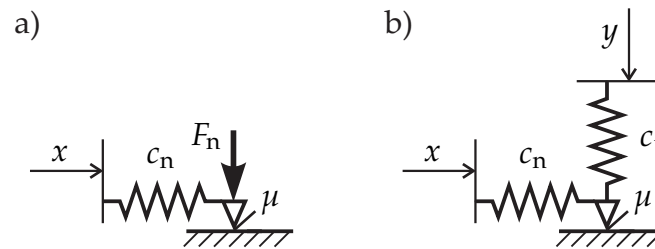
Alternativ zu LAGRANGE-Multiplikatoren können die Kontaktrandbedingungen durch die Penalty-Methode angenähert werden, sodass keine zusätzlichen Variablen zur Lösung benötigt werden, vgl. WRIGGERS [100, S. 21]. Die Kontaktgesetze werden dabei nicht exakt eingehalten, sondern deren Verletzung entgegengewirkt, wobei Kontaktkräfte durch die unzulässige Verschiebung multipliziert mit einer Penaltyfeder ermittelt werden. Bei der Penalty-Methode bleibt die Dimension des Problems unberührt, jedoch



**Bild 2.15:** Darstellung des unilateralen Kontaktproblems nach WRIGGERS [100]; a) Ausgangsmodell für den Normalkontakt; b) Einhaltung der Undruchdringbarkeit mit LAGRANGE-Multiplikator  $\lambda$ ; c) Zulassen endlicher Durchdringung mit Penalty-Steifigkeit  $c_p$

muss die Steifigkeit  $c_p$  der Penaltyfeder vorgegeben werden, die als Residualsteifigkeit für vernachlässigte Nachgiebigkeiten in der Struktur physikalisch interpretiert werden kann, vgl. PANNING [64] und CIGEROGLU ET AL. [12]. **Bild 2.15** zeigt den Vergleich zwischen der LAGRANGE-Multiplikator Methode und der Penalty-Methode am Beispiel des unilateralen Normalkontakts. Die Penalty-Methode bietet die Möglichkeit Nichtlinearitäten in der Kraft-Verschiebungskennlinie in Form einer nichtlinearen Feder direkt im Kontaktmodell zu beschreiben, vgl. PANNING [64] und SEXTRO [85]. Ohne den Penalty-Kontaktparameter ist das Strukturmodell, bzw. die Netzstruktur bei Finite Elemente Modellen, entscheidend für das Verformungsverhalten in der Kontaktzone. PHADKE [75] untersuchte den Kontakt eines Reibelements an einer aus zwei gekoppelten Balken bestehenden Struktur sowohl experimentell, als auch numerisch mit der Finite Elemente Methode. Mit dem LAGRANGE-Multiplikator Kontakt konnte PHADKE aus Zeitschrittssimulationen keine Übereinstimmung mit durchgeführten Messungen erzielen. Die Simulationsergebnisse überschätzen die gemessenen Schwingungsantworten und der Autor vermutete ein aus Gründen akzeptabler Rechenzeiten zu grob gewähltes Finite Elemente Netz für die Kontaktsimulation.

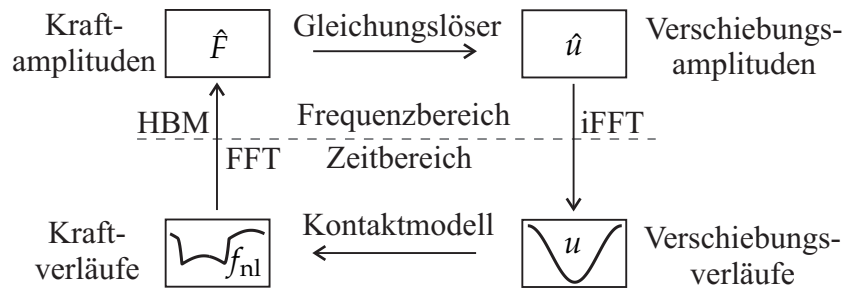
Der COULOMB-Kontakt in Tangentialrichtung kann mit einer in Reihe geschalteten Penalty-Feder zu einem Elasto-Gleit-Modell erweitert werden. BALMER [2] verwendete den elastischen Tangentialkontakt mit konstanter Normalkraft für die Untersuchung der Dämpfung durch Reibelemente. Die Kombination aus Elasto-Gleit-Modell und Nachgiebigkeit in Normalenrichtung wurde von YANG ET AL. [101] beschrieben, vgl. **Bild 2.16**. MENQ ET AL. wiesen darauf hin, dass Reibelemente neben einem statischen Anteil der Kontaktnormalkraft aufgrund ihrer Bewegung eine überlagerte fluktuierende Normalkraft erfahren können. Mit dem in **Bild 2.16 b)** dargestellten Modell lassen sich veränderliche Normalkräfte und deren Auswirkung auf den Reibkontakt berücksichtigen. CIGEROGLU & MENQ [12] und PETROV [69] erweiterten das in **Bild 2.16 b)** gezeigte Punktkontaktmodell um eine Tangentialrichtung in die Tiefe für den räumlichen Kontakt, wobei die tangentialen Penalty-Federn unabhängig voneinander ohne Kopplung modelliert wurden. Ein ähnliches Punktkontaktmodell unter Berücksichtigung tangentialer Kopplung entwickelte SEXTRO [85] für den räumlichen Kontakt.



**Bild 2.16:** Auf der Penalty-Methode basierende Kontaktmodelle für einen Punktkontakt; a) Elasto-Gleit-Modell mit konstanter Normalkraft; b) Elasto-Gleit-Modell mit Penalty-Kontakt in Normalenrichtung zur Berücksichtigung veränderlicher Kontaktnormalkräfte

MENQ ET AL. [54, 55] befassten sich mit dem Einfluss von Mikroschlupfeffekten und gaben auf der Basis experimenteller Untersuchungen an, dass insbesondere bei hohen Kontaktnormalkräften teilweises Gleiten in der Kontaktzone auftreten kann, auch wenn makroskopisch noch keine Relativbewegung vorliegt. Die Mikroschlupfmodellierung lässt sich durch mehrere parallel geschaltete Elasto-Gleit-Kontaktmodelle realisieren, die sich auf einen Kontaktpunkt beziehen, vgl. IWAN [36]. CIGEROGLU & ÖZGÜVEN [14] verwendeten ein vereinfachtes Kontaktmodell mit zwei verschiedenen Steigungen in der Kraft-Weg-Verschiebungskennlinie als Näherung an eine gemessene Reibhysterese. Mikroschlupfeffekte wurden von SEXTRO [85] durch in der Kontaktzone verteilte Punktkontaktmodelle berücksichtigt, die durch ihre räumlichen Anordnung partielles Gleiten in der Kontaktzone abbilden können, vgl. hierzu auch PANNING [64].

Schwingungen linearer Systeme können effektiv im Frequenzbereich analysiert werden. Bei der dynamischen Analyse von nichtlinearen Schwingungen ist die auf dem GALERKIN-Verfahren basierende Harmonische Balance Methode zur Bestimmung einer Näherungslösung verbreitet, vgl. POPP [78, S. 79-82]. Periodische Schwingungen werden dabei durch eine begrenzte Anzahl ihrer harmonischen Komponenten oder in erster Näherung nur durch ihre grundharmonische Komponente beschrieben. CAMERON & GRIFFIN [6] entwickelten eine Frequenz-/Zeitbereichsanalyse, die als *alternating frequency/time domain method* (AFT-Methode) bezeichnet wird. Die Systemgleichung des linearen Schwingers wird im Frequenzbereich beschrieben, nichtlineare Kräfte werden im Zeitbereich ausgewertet und anschließend mit der Fouriertransformation in den Frequenzbereich überführt. Der zugehörige Ablauf ist in **Bild 2.17** graphisch dargestellt. Durch CARDONA ET AL. [9] ist eine ausführliche Beschreibung der Methode unter Berücksichtigung höherharmonischer Anteile gegeben. Die AFT-Methode wird häufig in Kombination mit der Penalty-Kontaktbeschreibung zur Analyse von linearen Strukturen mit lokal angreifenden Kontaktkräften verwendet, vgl. LAXALDE ET AL. [50, 51], POUDOU & PIERRE [79], PANNING [64], SIEWERT ET AL. [87]. Der Vorteil ist eine auf Relativverschiebungen beruhende Kontaktkraftberechnung mit nicht veränderlicher Problemdimensionierung innerhalb eines linearen Differentialgleichungssystems zur Beschreibung der Struktur. NACIVET ET AL. [60] führten die *dynamic lagrangian mixed frequency-time method* (DLFT-Methode) ein, die auf einer Kombination von Penalty-



**Bild 2.17:** Schematische Darstellung der AFT-Methode zur Bestimmung der Frequenzantwort eines dynamischen Systems mit nichtlinearem Kontakt im Frequenzbereich und Auswertung der Kontaktkraftverläufe im Zeitbereich, vgl. CAMERON & GRIFFIN [6]

Kontakt und LAGRANGE-Multiplikatoren basiert. Die DLFT-Methode bietet die Möglichkeit der Frequenz-/Zeitbereichs Analyse bei exakter Einhaltung der Kontakttrandbedingungen, ohne zusätzlich einzuführende Variablen. Das DLFT-Verfahren eignet sich damit besonders für Schwingungsanalysen elastischer Strukturen mit Kontakttrandbedingungen.

Für die Lösung nichtlinearer algebraischer Gleichungssysteme wird das NEWTON-Verfahren als Standardverfahren angegeben, vgl. SCHABACK & WENDLAND [82, S. 107]. Die für den Lösungsalgorithmus benötigte Jacobimatrix des Systems kann für eine effiziente Berechnung analytisch bereitgestellt werden. Für das Penalty-Kontaktmodell wurde die analytische Berechnung der Jacobimatrix von BORRAJO ET AL. [3] und SIEWERT ET AL. [88] beschrieben. Bei nichtlinearen Problemen können darüber hinaus Pfadverfolgungsmethoden zur Bestimmung der Frequenzantwort notwendig sein, um instabile Lösungsbereiche und Bifurkationspunkte bestimmen zu können, vgl. CARDONA ET AL. [9] und SEYDEL [86]. Der Lösungsvektor des Systems wird dabei um die Anregungsfrequenz ergänzt, welche Teil des zu lösenden Problems wird. Für das erweiterte System wird eine zusätzliche Nebenbedingung benötigt, die zur Definition der Schrittweite entlang der Lösungskurve genutzt werden kann, vgl. SEYDEL [86].

### 2.3.2 Dämpfungsmodellierung

Im Hinblick auf dynamische Analysen reibungsgedämpfter Systeme mit Frequenzverstimmung ist die Dämpfung der linearen Struktur von entscheidender Bedeutung. Bei der Wahl des Dämpfungsmodells ist auf eine Vergleichbarkeit der Frequenzantworten des verstimmtten und des unverstimmtten Systems zu achten. Die Frequenzverstimmung sollte daher den Dämpfungsgrad einzelner Schwingungsformen nicht beeinflussen. Im Folgenden werden häufig verwendete Dämpfungsmodelle beschrieben und die Frequenzabhängigkeit der modalen Dämpfungsgrade verglichen.

Viele Strukturen, wie Brücken, Flugzeuge und Turbinenschaufeln sind Beispiele für schwach gedämpfte Strukturen, die über die folgende lineare Differentialgleichung be-

schrieben werden können, vgl. GASCH [30, S. 195]

$$M\ddot{u} + D\dot{u} + Ku = 0 \quad (2.4)$$

Die Matrizen  $M, D, K$  beschreiben jeweils die symmetrische Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrix des Systems mit  $N$  Zeilen und  $N$  Spalten. Die physikalischen Verschiebungen sind durch den Vektor  $u$  beschrieben. Eine Transformation von Gl. (2.4) mit der Modalmatrix  $\Phi$  der Eigenvektoren

$$u = \Phi q \quad (2.5)$$

überführt die physikalischen Koordinaten  $u$  in modale Koordinaten  $q$ . Die Bewegungsdifferentialgleichung in modalen Koordinaten folgt zu

$$\Phi^T M \Phi \ddot{q} + \Phi^T D \Phi \dot{q} + \Phi^T K \Phi q = 0. \quad (2.6)$$

Es lässt sich zeigen, dass aufgrund der Orthogonalitätsbeziehung der Eigenvektoren die transformierte Massenmatrix und die transformierte Steifigkeitsmatrix Diagonalgestalt haben, vgl. GASCH [30, S. 191]. Sind die Eigenvektoren darüber hinaus massennormiert folgt mit der Einheitsmatrix  $I$  und der Spektralmatrix  $\Lambda$

$$I\ddot{q} + \Phi^T D \Phi \dot{q} + \Lambda q = 0. \quad (2.7)$$

Einträge in der geschwindigkeitsproportionalen Dämpfungsmatrix, die auch als viskose Dämpfung bezeichnet wird, werden aufgrund mangelnder Informationen häufig so gewählt, dass nach der Modaltransformation ebenfalls eine Diagonalmatrix entsteht. Sofern die gewählte Dämpfungsmatrix  $D$  durch dieselbe Transformation diagonalisiert werden kann, wie bereits  $M$  und  $K$ , bleiben die Eigenvektoren des ungedämpften Systems auch für das gedämpfte System erhalten, vgl. EWINS [22, S. 65]. Nach GASCH [30, S. 195] existieren für die Besetzung der Dämpfungsmatrix kaum qualitative oder quantitative Ansätze, die eine kompliziertere Rechnung rechtfertigen, was dazu führt, dass die Annahme der Proportionaldämpfung

$$D = \alpha M + \beta K, \quad (2.8)$$

ein verbreiteter Ansatz für die Modellierung der Dämpfung ist. CAUGHEY & KELLY [11] gaben als Diagonalisierungsbedingung für die Dämpfungsmatrix allgemein die Reihe

$$D = M \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \left[ M^{-1} K \right]^k \quad (2.9)$$

an, mit der die Eigenformen des ungedämpften Systems nach der Modaltransformation erhalten bleiben und in der die Proportionaldämpfung aus Gl. (2.8) als Sonderfall enthalten ist, vgl. O'KELLY [62] und WILSON & PENZIEN [99].

GASCH [30, S. 218 ff.] untersuchte den Einfluss der Proportionaldämpfung auf die modalen Dämpfungsgrade der einzelnen Schwingungsformen des Systems, indem er das modal entkoppelte System aus Gl. (2.7) zeilenweise als modalen Einmassenschwinger interpretiert. Die  $j$ -te Schwingungsform wird nach Einsetzen von Gl. (2.8) beschrieben

durch

$$\ddot{q}_j + (\alpha + \beta\omega_{0,j}^2)\dot{q}_j + \omega_{0,j}^2q_j = 0. \quad (2.10)$$

Ein Vergleich mit der bekannten Definition des Dämpfungsgrads für Einfreiheitsgradsysteme ergibt für den geschwindigkeitsproportionalen Faktor in Gl. (2.10)

$$\alpha + \beta\omega_{0,j}^2 = 2D_j\omega_{0,j}. \quad (2.11)$$

Der modale Dämpfungsgrad  $D_j$  folgt damit zu

$$D_j = \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\omega_{0,j}} + \frac{1}{2} \beta\omega_{0,j}. \quad (2.12)$$

Aus Gl. (2.12) wird deutlich, dass der modale Dämpfungsgrad von der Eigenfrequenz der Schwingungsform abhängig ist. Für  $\alpha \neq 0, \beta = 0$  ist das System massenproportional gedämpft, was der Bewegung in einem Fluid entspricht und der Dämpfungsgrad nimmt mit der Eigenfrequenz ab. Der Fall  $\alpha = 0, \beta \neq 0$  beschreibt viskoelastische Dämpfung, bei der die höheren Schwingungsformen mit steigender Frequenz stärker gedämpft sind. Nach GASCH [30, S. 219] ist eine frequenzabhängige modale Dämpfung häufig nicht zutreffend. Um experimentelle Beobachtungen zur Dämpfung von Metallkonstruktionen besser anzunähern kann eine viskoelastische Dämpfung mit dem Faktor

$$\beta = \frac{\beta_0}{\Omega} \quad (2.13)$$

verwendet werden, vgl. GASCH [30, S. 220]. Im Resonanzfall kann zur Abschätzung der Dämpfung für schwach gedämpfte Systeme näherungsweise  $\omega_{0,j} = \Omega$  gesetzt werden, womit der modale Dämpfungsgrad zumindest in Resonanz den frequenzunabhängigen Wert

$$D_j = \frac{1}{2} \beta_0 \quad (2.14)$$

annimmt. Alternativ lassen sich die modalen Dämpfungsgrade  $D_j$  nach der Modaltransformation für jede Mode auch separat einstellen. Diese vereinfachte Methode der direkten Vorgabe der modalen Dämpfungsmatrix stellt die Frequenzunabhängigkeit der Dämpfungsgrade sicher und kann aufgrund von Erfahrungswerten zu besseren Lösungen führen, als eine der genannten Annahmen, vgl. GASCH [30, S. 195].

### 2.3.3 Zyklisch symmetrische Strukturen

Das Schwingungsverhalten jeder ring- oder kreisförmigen Struktur lässt sich durch eine Überlagerung von Wellen, die sich um den Umfang ausbreiten, beschreiben, vgl. THOMAS [95, 96]. Reelle Schwingungsformen können in konjugiert komplexe Paare von Eigenvektoren aufgetrennt werden, die dann zwei gegenläufig um den Umfang laufende Wellen darstellen und einen für die Schwingungsform charakteristischen Phasenversatz zwischen diskreten Punkten auf dem Umfang aufweisen. Nach THOMAS [96] ist ein zyklisches Segment mit Phasenversatz zwischen linkem und rechtem Segmentrand aus-

reichend zur Beschreibung der Schwingungen der gesamten Struktur. Voraussetzung ist ein unverstimmtes System, bei dem alle Segmente identische mechanische Eigenschaften aufweisen, sodass sich zirkulante Strukturmatrizen ergeben.

Durch OLSON ET AL. [63] wurde ein umfangreicher Überblick zu zirkulanten Matrizen gegeben und mit Beispielen aus dem Bereich der Turbomaschinen erläutert. Zirkulante Matrizen haben die Form

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

und weisen neben einer Bandstruktur noch Einträge in der oberen rechten, bzw. unteren linken Ecke auf, sodass sich eine Zeile aus der zyklischen Verschiebung der vorhergehenden Zeile ergibt, vgl. STRANG [93]. Die Komponenten der Eigenvektoren von  $\mathbf{Z}$  zeigen in gleichmäßigen Winkelabständen auf den Einheitskreis in der komplexen Ebene. Mathematisch betrachtet handelt es sich dabei um Potenzen der primitiven Einheitswurzel  $w = e^{i2\pi/N}$  im Komplexen, wobei  $N$  den Rang der Matrix  $\mathbf{Z}$  beschreibt, vgl. OLSON ET AL. [63] und BOSCH [4, S. 182]. Die Eigenvektoren und Eigenwerte folgen für  $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$  zu

$$\text{Eigenvektoren: } y_k = [1 \ w^k \ w^{2k} \ \dots \ w^{(N-1)k}]^T \quad (2.16)$$

$$\text{Eigenwerte: } \lambda_k = 2 - w^k - w^{-k} = 2 - 2 \cos \frac{2\pi k}{N}. \quad (2.17)$$

Für  $k = 0$  ist der zugehörige Eigenwert  $\lambda_0 = 0$ . Zirkulante Matrizen, deren Zeilensummen Null ergeben sind singular und nicht invertierbar, vgl. STRANG [93, S. 3]. Es ist allerdings immer möglich die Einheitsmatrix oder Vielfache davon zu Gl. (2.15) zu addieren, wodurch die entstehende zirkulante Matrix invertierbar wird. Dieser mathematische Vorgang kann mit einer Kopplung einer beschriebenen zyklischen Struktur an die Umgebung interpretiert werden. Der nullte Eigenwert ohne Relativbewegung der Segmente wird damit entsprechend angehoben. Die Eigenvektoren bleiben unberührt und die Matrix der Eigenvektoren ist die aus der digitalen Signalverarbeitung bekannte Fouriermatrix

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w & w^2 & w^3 & \dots & w^{(N-1)} \\ 1 & w^2 & w^4 & w^6 & \dots & w^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & w^{(N-2)} & w^{2(N-2)} & w^{3(N-2)} & \dots & w^{(N-1)(N-2)} \\ 1 & w^{(N-1)} & w^{2(N-1)} & w^{3(N-1)} & \dots & w^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

mit der das zyklische System diagonalisiert werden kann, vgl. STRANG [93, S. 443]. Die diagonalisierte Matrix enthält komplexe Einträge, die den zyklischen Segmenten in



der von THOMAS [96] beschriebenen komplexen Darstellung entsprechen. Unverstimmte Turbinen- und Verdichterschaufelkranzmodelle werden häufig durch ein einziges zyklisches Segment mit komplexen Randbedingungen beschrieben, aus dem sich das Gesamtmodell expandieren lässt. Auch im Fall von nichtlinearen Reibkontakten zwischen benachbarten Schaufeln können stationäre Schwingungsantworten mit einem zyklisch reduzierten Modell bestimmt werden, vgl. PETROV [68], LAXALDE ET AL. [50] und FIR-RONE ET AL. [26].

## 3 Gegenstand der Arbeit

### 3.1 Bewertung des Stands des Wissens

#### **Bewusste alternierende Verstimmung und Reibungskopplung**

Wissenschaftliche Arbeiten im Bereich der Strukturmechanik von Turbomaschinen zeigen, dass sowohl die Verstimmung von Schaufelkränzen, als auch der Einsatz und die Modellierung nichtlinearer Reibungsdämpfung intensiv behandelt wurden und noch immer werden. Die gewonnenen Erkenntnisse aus der Forschung finden sich in Form von Gestaltungsrichtlinien und Patenten zur Auslegung von Schaufelkränzen wieder. Die Verbindung von bewusster Frequenzverstimmung eines Schaufelkranzes mit der Reibungsdämpfung zwischen benachbarten Schaufeln ist hingegen bisher nur wenig beachtet worden. Ein möglicher Grund hierfür besteht darin, dass die Themen Verstimmung und Reibungsdämpfung bei der Auslegung von Turbomaschinen unterschiedlich wichtig sind, je nachdem, welcher Bereich der Maschine betrachtet wird. Flattergefährdete Schaufelkranzstufen im Niederdruckbereich benötigen unter Umständen keine zusätzliche Dämpfung durch Fügstellen, vgl. KIELB ET AL. [44]. Ein technischer Kontakt zwischen diesen Schaufeln dient in erster Linie der strukturellen Versteifung, um die Gefahr des Flatterns zu reduzieren und ist nicht auf eine optimale Reibungsdämpfung ausgelegt. Auf der anderen Seite werden Reibelemente mit dem Ziel der Schwingungsdämpfung häufig in flatterstabilen Stufen eingesetzt. Der Forschungsschwerpunkt liegt dabei häufig auf der strukturdynamischen Analyse des nichtlinear gekoppelten Systems und weist nur selten Berührungspunkte zu strömungsmechanischen Fragestellungen auf. In der Folge sind Veröffentlichungen zu alternierender Frequenzverstimmung von Schaufelkränzen in Bezug auf die Auslegung von Reibelementen nahezu nicht vorhanden und ein mögliches Potenzial dieser Kombination ist bisher nicht gezielt untersucht worden. Untersuchungen zur Dynamik von Schaufelkränzen mit aeroelastischer Kopplung zeigen, dass durch eine bewusste alternierende Verstimmung sogar eine Erhöhung der Systemdämpfung möglich ist. Es stellt sich die Frage, ob diese Form der Schaufelverstimmung auch in Kombination mit Reibungskopplung vergleichbare Auswirkungen auf die Schwingungsantwort des Gesamtsystems hat und bei der Auslegung von Turbomaschinen genutzt werden kann, auch wenn keine Gefahr des Flatterns besteht.

#### **Strukturmodellierung**

Die Modellbildung ist eng mit dem individuell verfolgten Ziel einer wissenschaftlichen

Untersuchung verknüpft. Bei dem Vorhaben, qualitative Aussagen für ein beobachtetes Phänomen zu erhalten, haben sich einfache Modelle bewährt. Auf dem Gebiet der nichtlinearen Reibungskopplung in Schaufelkränzen konnten bereits mit einfachen Feder-Masse-Systemen analytische Zusammenhänge aufgezeigt und bei der Auslegung erfolgreich angewendet werden. Stehen hingegen quantitative Ergebnisse oder ein Vergleich mit Messdaten im Fokus, so ist ein Strukturmodell unter Umständen durch eine geometrisch detaillierte Modellierung mit der FEM an die reale Struktur anzupassen. Unabhängig von dem Detaillierungsgrad des Strukturmodells wird bei der Modellbildung von Schaufelkränzen mit Reibkontakten die Eigenschaft der lokalen Nichtlinearität genutzt. Der Schaufelkranz lässt sich durch ein lineares Strukturmodell mit konstanten Massen-, Steifigkeits- und Dämpfungsparametern beschreiben und die lokal angreifenden nichtlinearen Kräfte können als äußere - von der Bewegung der Struktur abhängige - Lasten in der Systembeschreibung berücksichtigt werden. Für das auf diese Weise beschriebene Problem wurde die AFT-Methode mit kombinierter Frequenz-/Zeitbereichsanalyse entwickelt, die bereits in zahlreichen Untersuchungen erfolgreich angewendet werden konnte. Das Verfahren nutzt die Harmonischen Balance Methode zur effektiven Bestimmung einer Näherungslösung der stationären Schwingungsantwort.

### **Modellierung der Strukturdämpfung**

Ein häufig verwendeter Ansatz zur Modellierung der Dämpfung ist die Proportionaldämpfung, welche einen Sonderfall zur modalen Entkopplung des Systems darstellt. Die modalen Dämpfungsgrade sind dabei allerdings von den Eigenfrequenzen der Strukturschwingungsformen abhängig und beeinflussen bei der Untersuchung von verstimmten Strukturen die Schwingungsantworten. Ein von der Anregungsfrequenz abhängiger Dämpfungsfaktor kann zumindest in Resonanz jeder Schwingungsform zu vergleichbaren Dämpfungsgraden führen, für Verstimmungsanalysen ist jedoch die Einstellung modaler Dämpfungsgrade separat für jede einzelne Schwingungsform direkt in der modalen Systembeschreibung sinnvoll.

### **Kontaktmodellierung**

Die Modellierung des nichtlinearen Kontakts erfordert ein geeignetes Modell, mit dem die Reaktionskräfte in der Kontaktzone beschrieben werden können. Für die Untersuchung nichtlinearer Schwingungen hat sich der Einsatz von Penalty-Modellen sowohl bei Feder-Masse-Systemen, als auch für den Knoten-zu-Knoten-Kontakt in Finite Elemente Modellen bewährt. Mit einer elastischen Strukturbeschreibung und ausreichend genauer Modellierung der Kontaktzone kann der Einsatz der DLFT-Methode ohne weitere Nachgiebigkeiten sinnvoll sein. Nichtlineare Analysen von Mehrkörpersystemen können hingegen eine elastische Kontaktformulierung erfordern, um beobachtete Zusammenhänge abbilden zu können. Vereinfachte Mehrmassenmodelle werden im Bereich der Turbomaschinen häufig mit einer physikalischen Interpretation des Penalty-Kontakts bewusst nachgiebig gehalten. Auf diese Weise können die Vorteile einfacher Parametermodelle mit einer überschaubaren Komplexität der Strukturbeschreibung für nichtlineare Schwingungsanalysen genutzt werden.

## 3.2 Aufgabenstellung

Auf Basis des Stands des Wissens ergeben sich die folgenden Fragen und Aufgaben, die im Mittelpunkt der vorliegenden Arbeit stehen:

**Wie wirkt sich eine bewusste alternierende Verstimmung der Schaufeln auf die bei der Auslegung von Reibelementen in einem Schaufelkranz erzielbare Dämpfung aus?**

Bei dieser Fragestellung ist der Ausgangspunkt ein bewusst alternierend verstimmter Schaufelkranz, für den eine Kopplung durch Reibelemente in Betracht gezogen wird. Reibelemente können dazu dienen die eventuell nur gering vorhandene aerodynamische Dämpfung durch Reibung zu ergänzen und damit die Dämpfung insgesamt zu erhöhen. Für unverstimmte Systeme sind Dämpferoptimierungskurven zur Auslegung entwickelt worden. In der vorliegenden Arbeit sollen Dämpferoptimierungskurven für alternierend verstimmte Systeme in anwendungsrelevanten Parameterbereichen ermittelt und hinsichtlich ihrer praktischen Relevanz beurteilt werden. Durch die Analyse des dynamischen Systemverhaltens soll ein Vergleich der Optimierungskurven bei unverstimmten und alternierend verstimmten Systemen durchgeführt werden.

**Wie muss eine bewusste alternierende Verstimmung gestaltet werden, um die Dämpfungsleistung von Reibelementen zu erhöhen?**

Hintergrund für diese Frage bildet eine durch Reibelemente gekoppelte Schaufelkranzstufe, für die eine bewusste Frequenzverstimmung der Schaufeln aus strömungsmechanischer Sicht nicht notwendig ist. Die vorliegende Arbeit soll zeigen, ob eine bewusste alternierende Verstimmung bezüglich der Schaufeleigenfrequenzen die Dämpfungswirkung von Reibelementen gegenüber der unverstimmten Konfiguration verbessern kann. Die Wechselwirkung zwischen der Frequenzantwort des bewusst verstimmten Systems und der Kopplung durch Reibelemente soll grundlegend untersucht werden. Hierfür ist das notwendige Verständnis zur alternierenden Verstimmung und Reibungskopplung separat betrachtet zu erarbeiten. Mit den erzielten Erkenntnissen sollen prinzipielle Zusammenhänge und Beobachtungen anhand von numerischen Simulationsergebnissen erläutert und bewertet werden. Einsatzmöglichkeiten und Grenzen einer bewussten alternierenden Schaufelverstimmung bei reibungsgekoppelten Schaufelkränzen sind herauszustellen.

Die Auslegung der Reibungsdämpfung bei alternierend verstimmten Strukturen ist durch die Wechselwirkung von Verstimmung und Reibungsdämpfung bestimmt und erfordert Kenntnisse und tieferes Verständnis beider Teilgebiete. Die zentrale Aufgabe der vorliegenden Arbeit ist deshalb die **Erarbeitung einer Methodik zum systematischen Vorgehen bei der Auslegung von Verstimmung und Reibungsdämpfung.**

### 3.3 Vorgehensweise

Zur Beantwortung der formulierten Fragen ist eine Modellierung des Systems erforderlich, die es erlaubt, die komplizierten Zusammenhänge zwischen Eingangsgrößen, Designparametern und der Systemantwort zu durchdringen. Zunächst wird hierfür in Kapitel 4 der in der vorliegenden Arbeit verwendete Harmonische Index zur Beschreibung der Schwingungsformen von zyklisch symmetrischen Strukturen erläutert. In Kapitel 5 werden die Modellbildung und das Systemverhalten der linearen Struktur beschrieben. Die Untersuchung des Schwingungsverhaltens von verstimmtten Schaufelkränzen mit Reibkontakten wird mit möglichst einfachen Mehrkörpermodellen durchgeführt, die nur begrenzte Übertragbarkeit des Schwingungsverhaltens auf reale Schaufelgeometrien bieten. Eine Strukturmodellierung durch Feder-Masse-Systeme mit wenigen Freiheitsgraden erlaubt jedoch eine analytische Betrachtung der Zusammenhänge und kann zu einem besseren Verständnis beitragen. Aufgrund der überschaubaren Anzahl an Parametern lässt sich das lineare System nachvollziehbar beschreiben und prinzipielle Einflüsse können qualitativ erfasst werden. Die Berechnung von Eigenformen und Eigenfrequenzen wird manuell durchgeführt und der Einfluss der alternierenden Verstimmung lässt sich direkt aus der Lösung ablesen. Anschließend wird in Abschnitt 5.5 der Einfluss der alternierenden Verstimmung auf die für Turbomaschinen typische Anregungsform einer erregungsordnungs-basierten Anregung detailliert beschrieben. Es wird aufgezeigt welche Schwingungsformen einer zyklischen Struktur angeregt werden können und wie diese Anregbarkeit durch alternierende Verstimmung beeinflusst wird. In Abschnitt 5.6 wird schließlich die Frequenzantwort des unverstimmten und die des verstimmtten linearen Systems analysiert.

Kapitel 6 beinhaltet die Reibungskopplung benachbarter Schaufeln, bzw. Schwinger in einem zyklisch geschlossenen Kranz. Die Übertragungsfunktion für eine Kopplung durch COULOMB-schen Reibkontakt wird mit Hilfe der Harmonischen Balance Methode analytisch beschrieben. Die so gewonnene Beschreibung der Bewegungsgleichung des Systems zeigt die Abhängigkeit der Dämpfungswirkung von der Schwingungsform. Darüber hinaus werden Einschränkungen hinsichtlich komplexer Differenzierbarkeit und Bedingungen für die Lösbarkeit der ermittelten Näherungsgleichungen aufgezeigt.

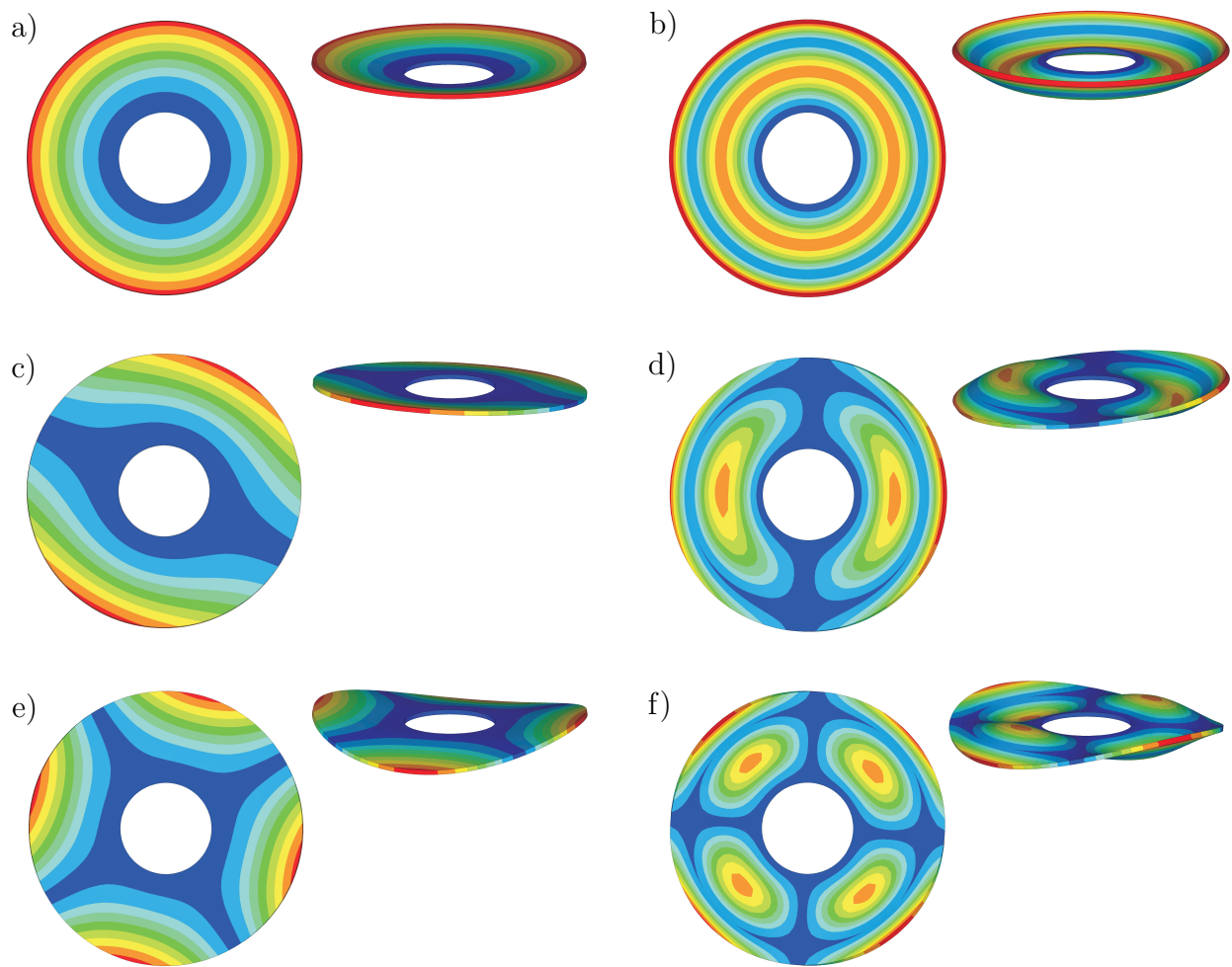
In Kapitel 7 wird das nichtlineare Schwingungsverhalten reibungsgekoppelter und alternierend verstimmtter Schaufelkränze analysiert. Zunächst wird der Reibkontakt mit Elasto-Gleit-Kontaktelementen formuliert und im Anschluss separate keilförmige Reibelemente zwischen benachbarten Schwingern in die Systembeschreibung der zyklischen Struktur integriert. Die Systemgleichungen werden mit dem GALERKIN-Verfahren in algebraische Gleichungen für die Fourierkoeffizienten der Schwingungsantwort überführt. Die Berechnung der nichtlinearen Kontaktkräfte erfolgt mit der AFT-Methode im Zeitbereich. Die Schwingungsantworten des alternierend verstimmtten und reibungsgedämpften Systems werden mit dem dynamischen Verhalten unverstimmter zyklischer Strukturen mit Reibungsdämpfern verglichen und bewertet.

## 4 Zyklische Symmetrie und Harmonischer Index

Rotationssymmetrische Bauteile weisen spezielle symmetrische Schwingungsformen auf, die auf unterschiedliche Weise beschrieben werden können. Diese Schwingungsformen lassen sich durch die Art und Anzahl der Knotenlinien, in denen die Struktur in Ruhe ist, beschreiben, wobei häufig zwischen Knotendurchmessern, die durch den Mittelpunkt verlaufen, und konzentrischen Knotenkreisen unterschieden wird, vgl. JAROSCH [39] und IRRETIER [35]. **Bild 4.1** zeigt verschiedene Schwingungsformen einer Kreisscheibe mit festgehaltenem Innenring. Ist eine diskrete Anzahl Schaufeln über den Umfang an der Scheibe vorhanden geht die Rotationssymmetrie in eine zyklische Symmetrie über und eine Beschreibung der Schwingungsformen wie bei Rotationssymmetrie ist nicht mehr möglich. Eine eindeutige Beschreibung der Schwingungsformen ist insbesondere im Hinblick auf eine alternierende Verstimmung von Schaufelkränzen erforderlich, die eine zyklische Symmetrie nach jeweils zwei Schaufeln aufweisen. In der vorliegenden Arbeit wird daher zur Beschreibung der Schwingungsformen der Harmonische Index verwendet, wie er in dem Finite Elemente Programm Ansys definiert ist, vgl. [48]. Im Folgenden wird hierfür der Zusammenhang zwischen Knotendurchmesser und Harmonischem Index erklärt und zwischen zyklisch symmetrischen und rotationssymmetrischen Strukturen unterschieden.

### 4.1 Rotationssymmetrische Strukturen

Die Schwingungsformen rotationssymmetrischer Strukturen lassen sich unabhängig von den Randbedingungen allgemein als harmonische Wellen über den Umfang beschreiben, vgl. IRRETIER [35, S. 170]. Eine Gruppierung der Schwingungsformen kann nach der Anzahl Knotendurchmesser erfolgen, die sich eindeutig auf die Anzahl voller Sinuswellen über den Umfang bezieht. Mögliche Knotenkreise sind dabei als höhere Schwingungsformen dieses Knotendurchmessers enthalten. In **Bild 4.1** e) und f) sind entsprechend jeweils zwei volle Sinuswellen entlang des Umfangs der Scheibe gut zu erkennen. Für Schwingungsformen mit mindestens einem Knotendurchmesser liegen doppelte Eigenwerte vor. Nach THOMAS [96] können die zugehörigen Eigenformen entweder als zwei entgegengesetzt umlaufende Wellen um den Umfang, bei denen die Knotenlinien auf dem Bauteil entsprechend rotieren, oder als zwei stehende Wellen beschrieben werden. Beide Darstellungen lassen sich ineinander überführen.

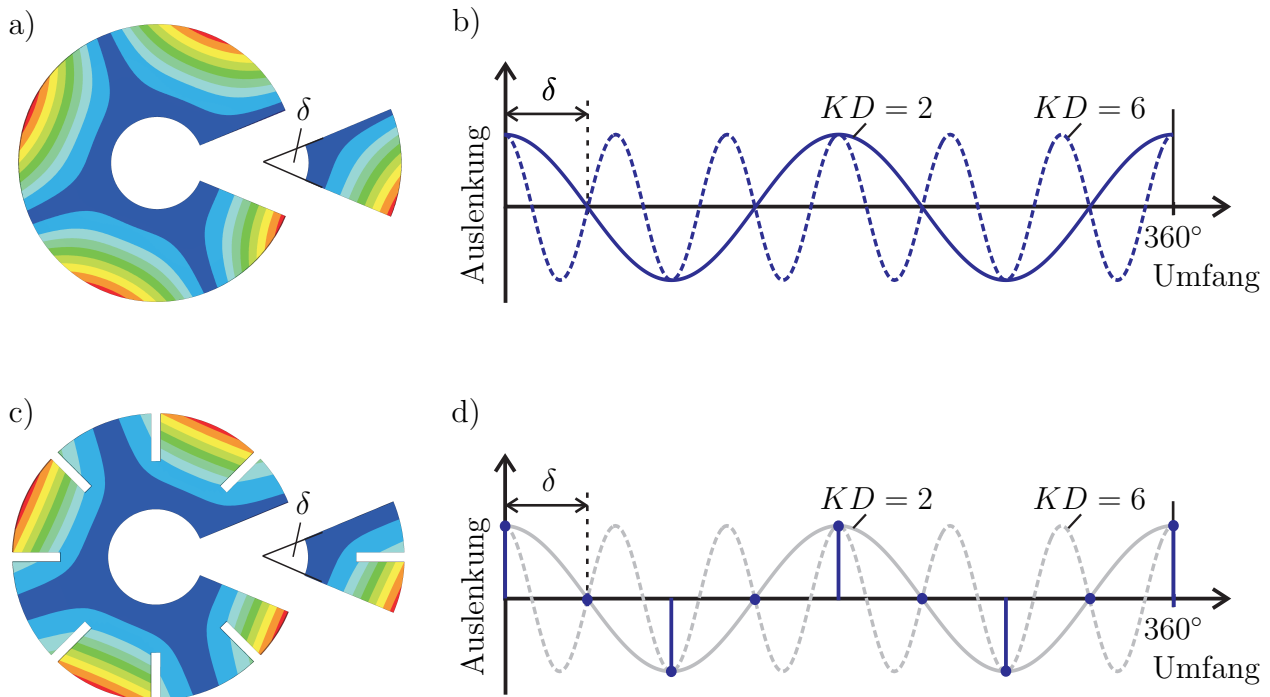


**Bild 4.1:** Eigenschwingungsformen einer gelochten Kreisscheibe mit festgehaltenem Innenring, sortiert nach Anzahl Knotendurchmessern ( $KD$ ) und Knotenkreisen ( $KK$ ); a)  $KD = 0$ ,  $KK = 0$ ; b)  $KD = 0$ ,  $KK = 1$ ; c)  $KD = 1$ ,  $KK = 0$ ; d)  $KD = 1$ ,  $KK = 1$ ; e)  $KD = 2$ ,  $KK = 0$ ; f)  $KD = 2$ ,  $KK = 1$

Eine Gruppierung der Knotendurchmesserschwingungsformen folgt aus der Betrachtung eines einzelnen Segments. Die Eigenformen können effizient berechnet werden, wenn nur ein zyklisches Segment mit komplexen Randbedingungen modelliert wird. **Bild 4.2 a)** zeigt ein Segment mit Winkel  $\delta$  für die gelochte Kreisscheibe. Der Segmentwinkel  $\delta$  ist bei rotationssymmetrischen Strukturen zunächst beliebig wählbar, muss aber mit einer ganzen Zahl multipliziert das Vollmodell ergeben. Für eine umlaufende Welle folgt der Phasenversatz

$$\Delta\tilde{\varphi}_{\text{rotsym}} = \pm\delta KD ; \quad \delta = \frac{2\pi}{N_{\text{seg}}} \quad (4.1)$$

zwischen den Rändern des herausgeschnittenen Segments, der für jeden Knotendurchmesser definiert ist. Der Zusammenhang wird durch **Bild 4.2 b)** verdeutlicht. Liegen mit Knotendurchmesser  $KD = 2$  zwei volle Sinuswellen über den Umfang vor, so ergibt sich an den Segmenträndern bezogen auf die umlaufende Welle ein Phasenwinkel von  $\Delta\tilde{\varphi}_{\text{rotsym}} = 2\delta$ , vgl. **Bild 4.2 a)** und b). Alle Knotendurchmesser mit dem gleichen Phasen-



**Bild 4.2:** Zyklisches Segment der gelochten Kreisscheibe mit und ohne Einschnitten; a) Segment der rotationssymmetrischen Struktur; b) Kontinuierlicher Verlauf der Schwingungsform über den Umfang; c) Segment der zyklisch symmetrischen Struktur; d) Diskrete Abtastung der Schwingungsform über den Umfang

versatz an den Segmenträndern können über den Harmonischen Index  $HI$  zusammengefasst werden und es folgt

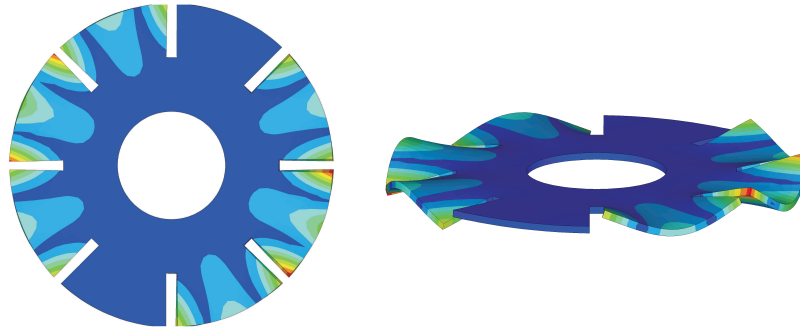
$$KD = nN_{\text{seg}} \pm HI ; n = 0, 1, 2, 3, \dots ; KD \geq 0. \quad (4.2)$$

Es wird deutlich, dass die unendlich vielen Knotendurchmesser für rotationssymmetrische Strukturen je nach Wahl des Segmentwinkels  $\delta$  zu den jeweiligen Harmonischen Indizes zugeordnet werden, wobei  $0 \leq HI \leq N_{\text{seg}}/2$  gilt. Bei  $N_{\text{seg}} = 8$  gehören demnach neben  $KD = 2$  auch  $KD = 8 \pm 2, 16 \pm 2, \dots$  zu dem Harmonischen Index  $HI = 2$ , vgl. **Bild 4.2 b)**.

## 4.2 Zyklisch symmetrische Strukturen

Bei zyklisch symmetrischen Strukturen wie Schaufelkränzen liegen keine Knotendurchmesserschwingungen mit harmonischer Verteilung über den Umfang vor. Diese Strukturen können ebenfalls in Segmente unterteilt werden, die im Gegensatz zu der gelochten Kreisscheibe nicht mehr beliebig klein gewählt werden können. **Bild 4.2 c)** zeigt die Kreisscheibe mit 8 Einschnitten, sodass die minimale Segmentgröße auf  $360^\circ/8$  begrenzt ist. Für die Schaufeln kann nur über den Harmonischen Index eine Phasenbeziehung zwischen gleichen Punkten in benachbarten Segmenten definiert werden. **Bild 4.3** zeigt eine





**Bild 4.3:** Schwingungsform der gelochten Kreisscheibe mit 8 Einschnitten und

Schwingungsform mit  $HI = 1$ , bei der die Schaufeln eine sogenannte *chordwise* Biegeschwingung ausführen. Die äußeren Kanten jeder Schaufel bewegen sich dabei gleichphasig, weisen jedoch einen Phasenversatz zu den benachbarten Schaufeln auf. **Bild 4.2 d)** verdeutlicht die diskrete Abtastung über den Umfang mit dem Phasenwinkel

$$\Delta\tilde{\varphi}_{\text{zyksym}} = \pm\delta HI ; \delta = \frac{2\pi}{N_{\text{seg}}} . \quad (4.3)$$

Die Begrenzung des Harmonischen Index auf  $0 \leq HI \leq N_{\text{seg}}/2$  folgt aus der Abtastung voller Sinusschwingungen über den Umfang. Diese lassen sich durch die Fouriermatrix aus Gl. (2.18) in Abschnitt 2.3.3 mit  $w = e^{i2\pi/N}$  auch wie folgt schreiben

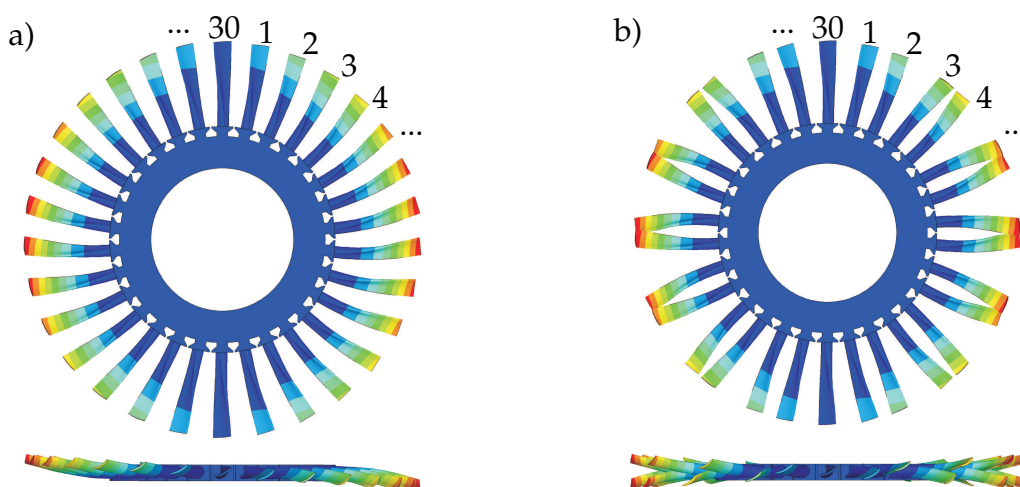
$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 & \dots & -1 & \dots & w^{-2} & w^{-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \dots & 1 & \dots & w^{-4} & w^{-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & w^{(N-2)} & w^{2(N-2)} & \dots & 1 & \dots & w^{-2(N-2)} & w^{-(N-2)} \\ 1 & w^{(N-1)} & w^{2(N-1)} & \dots & -1 & \dots & w^{-2(N-1)} & w^{-(N-1)} \end{bmatrix} . \quad (4.4)$$

Die Dimension  $N$  entspricht dabei der Anzahl der zyklischen Segmente  $N_{\text{seg}}$ . Die Spaltenvektoren liegen in konjugiert komplexen Paaren vor und beschreiben zwei entgegengesetzt umlaufende Wellen an diskreten Stellen über den Umfang. Ausgenommen hiervon sind Schwingungsformen mit  $HI = 0$  und  $HI = N_{\text{seg}}/2$ , für die rein reelle Vektoren, mit  $0^\circ$ , bzw.  $180^\circ$  Phasenversatz, die Schwingungsform beschreiben. Schwingungsformen zyklisch symmetrischer Bauteile lassen sich immer noch Knotendurchmessern nach Gl. (4.2) zuordnen, allerdings gelten diese nicht für die angehängten Schaufelstrukturen, was zu Verwirrungen bei der Beschreibung von Schwingungsformen bei Schaufelkränzen führen kann. Für die im folgenden Kapitel vorgestellten Modelle wird daher der Harmonische Index zur Beschreibung der Schwingungsform verwendet, sodass insbesondere bei der Erweiterung auf ein Segment mit zwei Schaufeln für die alternierende Verstimmung eine eindeutige Phasenbeziehung zwischen benachbarten Segmenten gegeben ist.

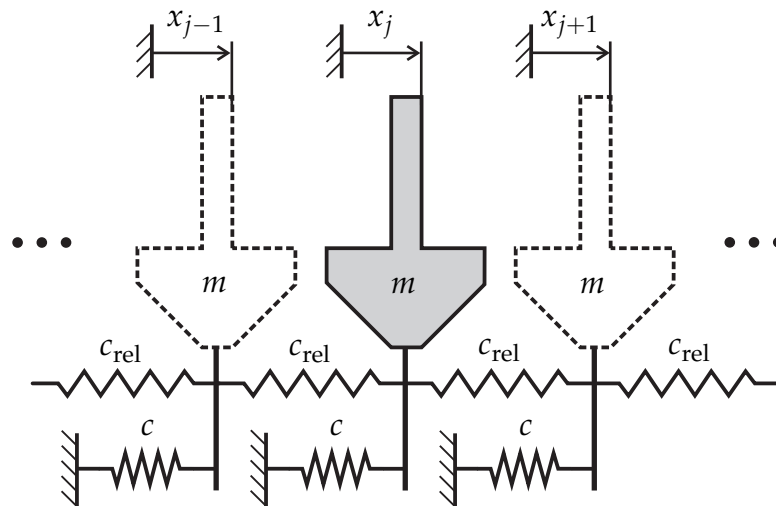
## 5 Modellbildung und Systemverhalten

In **Bild 5.1** sind die Ergebnisse der Modalanalyse eines Schaufelkranzmodells mit 30 Schaufeln aus dem Programmsystem Ansys dargestellt. **Bild 5.1 a)** zeigt zwei Ansichten der ersten Eigenform der unverstimmten, d. h. perfekt zyklisch symmetrischen, Struktur mit einem Harmonischen Index von  $HI = 1$  und **Bild 5.1 b)** mit einem Harmonischen Index von  $HI = 14$ . Beide Ergebnisse beschreiben die erste Biegeschwingung der Schaufeln mit der niedrigsten Eigenfrequenz, die auch als weiche Biegung bezeichnet wird. Ein Vergleich übereinstimmender Schaufeln in **Bild 5.1 a)** und **Bild 5.1 b)**, zeigt je nach betrachteter Schaufel exakt die gleiche oder eine um  $180^\circ$  phasenversetzte Auslenkung. Eine alternierende Frequenzverstimmung des Systems führt zu einer Kopplung dieser beiden Schwingungsformen und muss bei der Modellbildung berücksichtigt werden.

Schaufelkränze werden aufgrund der oft räumlich verwundenen Schaufelblattgeometrie mit der Finite Elemente Methode (FEM) modelliert. Eine möglichst exakte Beschreibung der Geometrie ist für die dynamische Auslegung einer Schaufel in der Praxis von Bedeutung, jedoch bietet ein vergleichsweise einfaches Mehrkörpersystem (MKS) für grundlegende Untersuchungen mit einem Fokus auf qualitative Zusammenhänge entscheidende Vorteile. Mit einer überschaubaren Anzahl von Systemparametern lässt sich der Einfluss einzelner Parameter auf die Schwingungsantwort gezielt analysieren und bewerten.



**Bild 5.1:** Modalanalyseergebnisse der unverstimmten Schaufelkranzstruktur mit 30 Schaufeln; a) Harmonischer Index  $HI = 1$ ; b) Harmonischer Index  $HI = 14$



**Bild 5.2:** Einmassenschwingersegment des zyklischen unverstimmten Mehrkörpersystems

In diesem Kapitel wird ein Minimalmodell für einen unverstimmten und ein Minimalmodell für einen alternierend verstimmtten Schaufelkranz vorgestellt. Die Modelle werden mit dem in **Bild 5.1** gezeigten Finite Elemente Modell eines Schaufelkranzes mit realistischer Geometrie verglichen und Grenzen für deren Anwendbarkeit formuliert. Darüber hinaus wird die Anregung unverstimmter und alternierend verstimmtter zyklischer Strukturen anhand der beschriebenen Minimalmodelle analysiert. Eine erregerordnungs-basierte harmonische Anregung führt im unverstimmten System zu einer Schwingungsantwort mit einem charakteristischen - der Anregung entsprechenden - Phasenversatz zwischen benachbarten Schaufeln. Es werden nur Schwingungsformen angeregt, die diesen Phasenversatz aufweisen. Für alternierend verstimmtte Systeme wird gezeigt, dass Schwingungsformen anregbar sind, die zwei verschiedene Phasenversatzwinkel zwischen benachbarten Schaufeln aufweisen, sodass sich die Schwingungsantwort aus der Überlagerung dieser Schwingungsformen ergibt.

## 5.1 Minimalmodell für einen unverstimmten Schaufelkranz

In **Bild 5.2** ist ein Segment des unverstimmten Mehrkörpersystems mit angedeutetem linken und rechten Nachbarschwinger dargestellt. Das Segment besteht aus einem Einmassenschwinger mit linearer Federkopplung gegenüber der Umgebung. Zwischen benachbarten Schwingern wirkt eine lineare Feder der Relativbewegung entgegen, wodurch der Einfluss einer elastischen Scheibe bei realen Schaufelkränzen abgebildet wird. Dämpfung wird für eine modale Analyse des Systems vernachlässigt. Für einen qualitativen Vergleich der Ergebnisse des Mehrkörpersystems mit dem in **Bild 5.1** dargestellten Finite Elemente Modell kann ein Segment mit einem Freiheitsgrad als Näherungsmodell für eine Schaufeleigenform interpretiert werden. Für den Schwinger mit Index  $j$  ergibt sich die

Bewegungsgleichung nach dem Schwerpunktsatz zu

$$m\ddot{x}_j + cx_j + c_{\text{rel}}(x_j - x_{j+1}) + c_{\text{rel}}(x_j - x_{j-1}) = 0. \quad (5.1)$$

Gl. (5.1) ist eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung und beschreibt die  $j$ -te Zeile des zyklischen Gesamtsystems. Die allgemeine Lösung dieser Gleichung kann durch den Ansatz einer harmonischen Schwingung  $x_j = \hat{x}_j \cos(\omega t)$  für das betrachtete Segment und phasenversetzten harmonischen Schwingung mit gleicher Amplitude  $x_{j\pm 1} = \hat{x}_j \cos(\omega t \pm \Delta\tilde{\varphi})$  für die direkt benachbarten Segmente ermittelt werden. Wird die reelle Schwingungsantwort als Realteil eines komplexen Zeigers in der Form

$$x_j = \Re \left\{ \hat{x}_j e^{i\omega t} \right\} \quad (5.2)$$

betrachtet, so ist die Phaseninformation in der komplexen Amplitude  $\hat{x}_j$  enthalten. Diese Darstellung erleichtert die Berücksichtigung eines Phasenversatzes zwischen benachbarten Schwingern und die Verschiebungsgrößen  $\hat{x}_{j-1}$  und  $\hat{x}_{j+1}$  können durch eine Drehung in der komplexen Ebene auf die Bewegung des  $j$ -ten Segments zurückgeführt werden und lauten

$$\hat{x}_{j-1} = \hat{x}_j e^{-i\Delta\tilde{\varphi}} \quad (5.3)$$

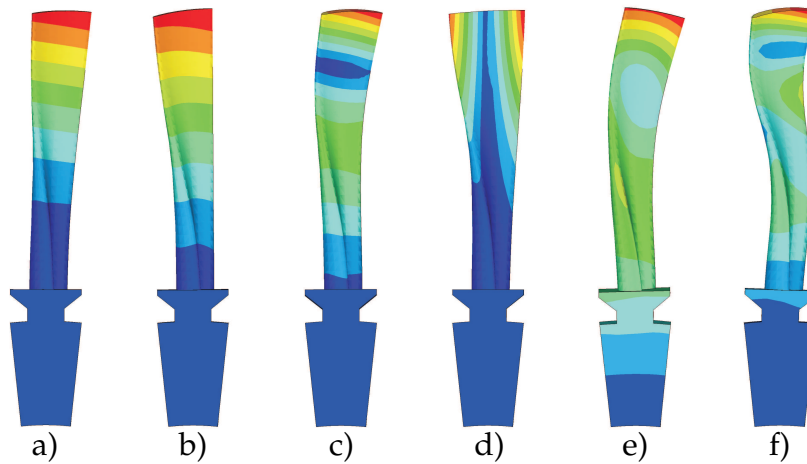
$$\hat{x}_{j+1} = \hat{x}_j e^{+i\Delta\tilde{\varphi}}. \quad (5.4)$$

Die Rückführung der Systemgleichung der gesamten Schwingerkette auf ein sich wiederholendes Segment ist aufgrund der zyklischen Symmetrie des unverstimmten Systems möglich. Die komplexe Beschreibung der Phasenbeziehungen an einem zyklischen Segment führt auf eine komplexe Basis für die resultierenden Eigenformen, welche als Wanderwellen um den Umfang interpretiert werden können. Zu jedem Eigenwert gehören zwei komplexe Eigenformen mit unterschiedlicher Wellenausbreitungsrichtung, die bei gleichwertiger Überlagerung eine stehende Welle bilden. Im Gegensatz dazu führt eine Modalanalyse des Gesamtsystems mit reeller Basis auf jeweils zwei reelle Schwingungsformen für einen Eigenwert. Beide Betrachtungen sind ineinander überführbar und unterscheiden sich nur in der Basis zur Beschreibung der Schwingungsformen.

Der Phasenwinkel  $\Delta\tilde{\varphi}$  ist abhängig von der Anzahl  $N$  der Schwinger und wird über den Harmonischen Index  $HI$  definiert zu

$$\Delta\tilde{\varphi} = \pm \frac{2\pi HI}{N} \quad \text{mit} \quad HI = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2}. \quad (5.5)$$

Es sind folglich nur diskrete Werte für den Phasenversatz in den Grenzen  $-\pi \leq \Delta\tilde{\varphi} \leq \pi$  möglich, die eine symmetrisch um den Umfang geschlossene Schwingungsform ausbilden. Voraussetzung für einen Harmonischen Index  $HI = \frac{N}{2}$  mit rein gegenphasiger Bewegung ist eine gerade Anzahl von Schwingern. Das Vorzeichen von  $\Delta\tilde{\varphi}$  gibt dabei die Umlaufrichtung der als Wanderwelle beschriebenen Schwingungsform an. Die Modalanalyseergebnisse in **Bild 5.1** zeigen demnach für  $HI = 1$  einen Phasenversatz von  $12^\circ$  zwischen benachbarten Schaufeln, sodass die momentane Auslenkung der 30 Schaufeln über den Umfang genau einer Sinuskurve entspricht. Für  $HI = 14$  bildet sich durch einen



**Bild 5.3:** Schaufeleigenformen des zyklischen Finite Elemente Schaufelsegments mit aufsteigender Eigenfrequenz; a) erste weiche Biegung (1F); b) erste steife Biegung (1E); c) zweite weiche Biegung (2F); d) erste Torsion (1T); e) zweite steife Biegung (2E); f) dritte weiche Biegung (3F)

Phasenversatz von  $168^\circ$  entsprechend eine momentane Auslenkung mit genau vierzehn Sinuskurven.

Die Bewegungsgleichung (5.1) wird mit einem komplex erweiterten harmonischen Ansatz unter Berücksichtigung von Gl. (5.3) und Gl. (5.4) reduziert auf

$$\left(-\omega^2 m + c + 2c_{\text{rel}} - c_{\text{rel}}(e^{-i\Delta\tilde{\varphi}} + e^{+i\Delta\tilde{\varphi}})\right) \hat{x}_j = 0. \quad (5.6)$$

Die Addition der beiden konjugiert komplexen Zeiger in der Klammer hinter  $c_{\text{rel}}$  ist rein reell und beschreibt eine Kosinusfunktion. Gl. (5.6) wird damit überführt in

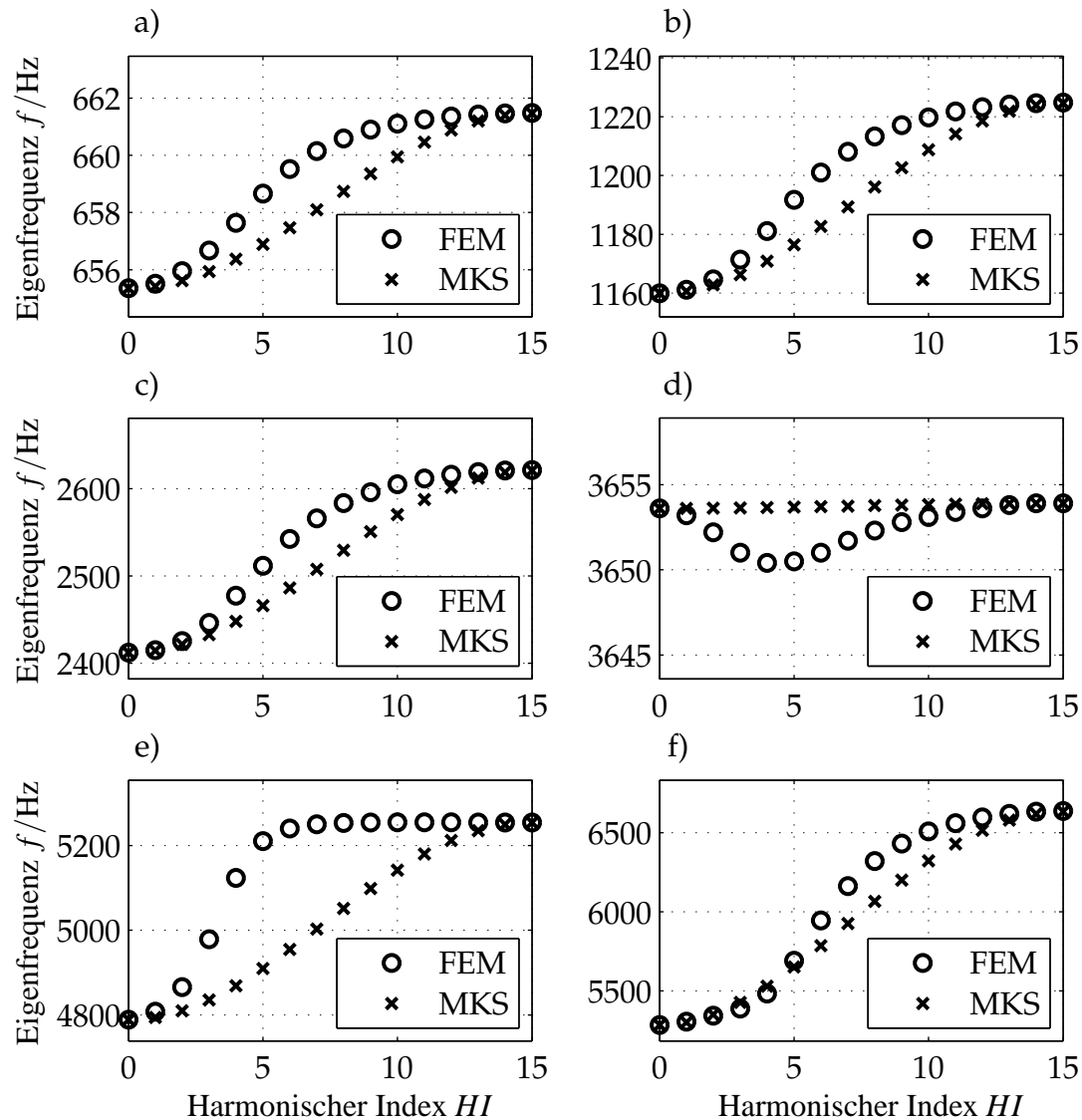
$$\left(-\omega^2 m + c + 2c_{\text{rel}}(1 - \cos(\Delta\tilde{\varphi}))\right) \hat{x}_j = 0. \quad (5.7)$$

Die Eigenkreisfrequenzen ergeben sich daraus zu

$$\omega^2(\Delta\tilde{\varphi}) = \frac{c + 2c_{\text{rel}}(1 - \cos(\Delta\tilde{\varphi}))}{m} \quad (5.8)$$

und sind abhängig von der Phasenverschiebung  $\Delta\tilde{\varphi}$  bzw. von dem zugehörigen Harmonischen Index  $HI$ . Die niedrigste Eigenfrequenz liegt für das Mehrkörpersystem bei  $\Delta\tilde{\varphi} = 0$  vor und entspricht der Eigenfrequenz des Einmassenschwingers ohne Kopplung. Die der Relativbewegung entgegen wirkende Feder wird dabei nicht gelängt oder gestaucht, da sich alle Segmente phasengleich bewegen. Bei einer gegenphasigen Schwingung benachbarter Segmente mit  $\Delta\tilde{\varphi} = 180^\circ$  ist die Eigenfrequenz maximal.

In **Bild 5.3** sind die ersten sechs Schaufeleigenformen des Finite Elemente Modells dargestellt. Die Bezeichnungen beziehen sich auf die Art der Verformung des Schaufelprofils. Die erste Biegeschwingung in biegeweicher Richtung wird als 1F (*flapwise*) und die erste Biegeschwingung in biegesteife Richtung als 1E (*edgewise*) bezeichnet. Torsionsschwingungsformen werden mit T abgekürzt. Diese Kategorisierung ist bei stark verwundenen Schaufeln nicht mehr eindeutig anwendbar, wird aber verbreitet zur Beschreibung von



**Bild 5.4:** Eigenfrequenzen der ersten sechs Schaufeleigenformen in Abhängigkeit des Harmonischen Index  $HI$ ; a) erste weiche Biegung (1F); b) erste steife Biegung (1E); c) zweite weiche Biegung (2F); d) erste Torsion (1T); e) zweite steife Biegung (2E); f) dritte weiche Biegung (3F)

Schaufelschwingungsformen verwendet. **Bild 5.4** zeigt die Verläufe der Eigenfrequenzen des Finite Elemente Modells überlagert mit den Verläufen der Eigenfrequenzen des Mehrkörpersystems. Jeder Verlauf bezieht sich auf eine Schaufeleigenform und wird auch als Schwingungsfamilie bezeichnet. Die Parameter des MKS sind jeweils so gewählt, dass die Frequenzen für  $HI = 0$  und  $HI = 15$  mit den Ergebnissen der FEM Berechnung übereinstimmen. Der versteifende Einfluss der Scheibe kann für die ersten drei Schaufeleigenformen abgebildet werden. Die Torsionsschwingungsform in **Bild 5.4** d) weist einen von der Kosinusform abweichenden Verlauf auf, der durch das vereinfachte Modell nicht wiedergegeben werden kann. Allerdings ist die Frequenzabhängigkeit gering und das MKS kann mit  $c_{rel} = 0$  als Näherung verwendet werden. Die zweite steife Biegeschwingungsform der Schaufel zeigt einen Verlauf, der über einen weiten Bereich des

$HI$  vergleichsweise konstante Frequenzwerte aufweist und durch den Kosinusverlauf nur schlecht angenähert werden kann, vgl. **Bild 5.4 e**). Die in **Bild 5.4 f**) dargestellte 3F-Biegeschwingsform lässt sich hingegen wieder gut beschreiben. Das MKS kann folglich als Näherungsmodell für eine Schaufelkranzschwingung mit einer isolierten Eigenform der Schaufeln verwendet werden. Der Verlauf der Eigenfrequenzen über dem Harmonischen Index muss dabei in guter Näherung durch eine Kosinusform beschrieben oder mit  $c_{\text{rel}} = 0$  vernachlässigt werden können.

## 5.2 Minimalmodell für einen alternierend verstimmten Schaufelkranz

Bei alternierender Frequenzverstimmung eines Schaufelkranzes werden benachbarte Schaufeln bewusst in ihren Eigenfrequenzen verstimmt. In dem MKS kann diese Verstimmung durch einer Veränderung der Massen bzw. Steifigkeiten eines Schwingers erfolgen. Die auf diese Art verstimmten Systeme weisen immer noch eine zyklische Symmetrie nach jeweils zwei Schaufeln auf. **Bild 5.5** zeigt eine Erweiterung des unverstimmten Modells (vgl. **Bild 5.2**) mit dem sich zyklisch wiederholenden Paar verstimmtter Schwinger, sowie angedeutetem linken und rechten Nachbarschwinger. Die Bewegungsgleichungen des Segments ergeben sich nach dem Schwerpunktsatz zu

$$m_A \ddot{x}_{A,j} + c_A x_{A,j} + c_{\text{rel}}(x_{A,j} - x_{B,j}) + c_{\text{rel}}(x_{A,j} - x_{B,j-1}) = 0 \quad (5.9)$$

$$m_B \ddot{x}_{B,j} + c_B x_{B,j} + c_{\text{rel}}(x_{B,j} - x_{A,j}) + c_{\text{rel}}(x_{B,j} - x_{A,j+1}) = 0. \quad (5.10)$$

Für die Lösung der Differentialgleichungen wird jeweils ein harmonischer Ansatz gewählt. Mit einer komplexen Erweiterung, vgl. Gl. (5.2), folgt

$$x_{A,j} = \Re \left\{ \hat{x}_{A,j} e^{i\omega t} \right\} ; \quad x_{B,j} = \Re \left\{ \hat{x}_{B,j} e^{i\omega t} \right\}. \quad (5.11)$$

Die Phasenbeziehungen zwischen Schwingern vom Typ A und zwischen Schwingern vom Typ B können im Komplexen dargestellt werden als

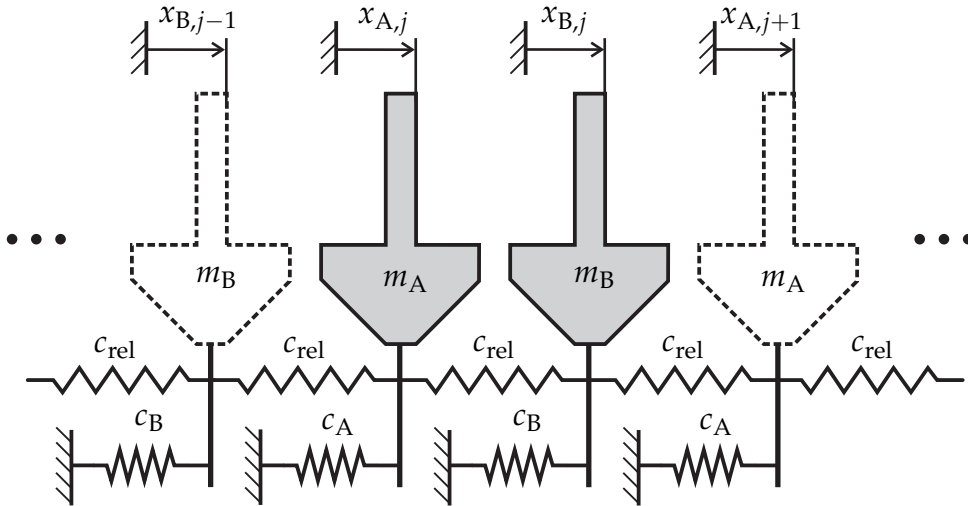
$$\hat{x}_{B,j-1} = \hat{x}_{B,j} e^{-i\Delta\tilde{\psi}}, \quad (5.12)$$

$$\hat{x}_{A,j+1} = \hat{x}_{A,j} e^{+i\Delta\tilde{\psi}}. \quad (5.13)$$

Der Phasenwinkel  $\Delta\tilde{\psi}$  ist wie im unverstimmten Fall über den Harmonischen Index  $HI$  definiert. Mit zwei Schwingern je zyklischem Segment reduziert sich der Wertebereich gegenüber dem Minimalmodell mit einem Schwinger pro Segment zu

$$\Delta\tilde{\psi} = \pm \frac{4\pi HI}{N} \quad \text{mit} \quad HI = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{4}. \quad (5.14)$$

Die obere Grenze  $HI = \frac{N}{4}$  in Gl. (5.14) existiert nur für durch vier teilbare Schwingerzahlen. Falls  $N$  nicht durch vier teilbar ist, so ist maximal der nächstkleinere Wert für  $HI$  möglich. Im Vergleich zum unverstimmten Modell ist hier zwar der gleiche Wertebereich



**Bild 5.5:** Zweimassenschwingersegment des zyklischen, alternierend verstimmt Mehrkörpersystems

für den Phasenversatz  $-\pi \leq \Delta\tilde{\psi} \leq \pi$  möglich, jedoch jeweils zwischen zwei Schwingern vom gleichen Typ und mit weniger Zwischenwerten. Es ergibt sich das folgende Bewegungsgleichungssystem mit zwei Unbekannten  $\hat{x}_{A,j}$  und  $\hat{x}_{B,j}$  sowie entsprechend für jeden Harmonischen Index zwei Lösungen des zugehörigen Eigenwertproblems

$$\left( -\omega^2 \begin{bmatrix} m_A & 0 \\ 0 & m_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_A + 2c_{\text{rel}} & -c_{\text{rel}}(1 + e^{-i\Delta\tilde{\psi}}) \\ -c_{\text{rel}}(1 + e^{+i\Delta\tilde{\psi}}) & c_B + 2c_{\text{rel}} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \hat{x}_{A,j} \\ \hat{x}_{B,j} \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (5.15)$$

Der Zusammenhang der beiden Eigenwerte für einen Harmonischen Index wird deutlich wenn zunächst das zyklische Segment mit zwei Schwingern ohne Verstimmung betrachtet wird. Für  $m_A = m_B = m$  und  $c_A = c_B = c$  lautet die Determinante der Systemmatrix

$$(c + 2c_{\text{rel}} - \omega^2 m)^2 - c_{\text{rel}}^2 (1 + e^{-i\Delta\tilde{\psi}})(1 + e^{+i\Delta\tilde{\psi}}) \stackrel{!}{=} 0, \quad (5.16)$$

die zu Null gesetzt das charakteristische Polynom zur Berechnung der Eigenwerte ergibt. Die Eigenwerte lauten nach Überführung der komplexen Funktionen in einen äquivalenten Kosinusausdruck

$$\omega_{1/2}^2 = \frac{c + 2c_{\text{rel}}}{m} \pm \frac{c_{\text{rel}}}{m} \sqrt{2(1 + \cos(\Delta\tilde{\psi}))}. \quad (5.17)$$

Mit der trigonometrischen Umformung  $1 + \cos(\Delta\tilde{\psi}) = 2 \cos^2(\frac{\Delta\tilde{\psi}}{2})$  kann Gl. (5.17) umgeformt werden zu

$$\omega_{1/2}^2 = \frac{c + 2c_{\text{rel}}(1 \pm \cos(\frac{\Delta\tilde{\psi}}{2}))}{m}, \quad (5.18)$$



wodurch die Eigenwerte direkt mit dem Ergebnis aus Gl. (5.8) verglichen werden können. Die resultierende Beziehung zwischen  $\Delta\tilde{\psi}$  und  $\Delta\tilde{\varphi}$  folgt zu

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{c + 2c_{\text{rel}}(1 - \cos(\frac{\Delta\tilde{\psi}}{2}))}{m}} \Leftrightarrow \frac{\Delta\tilde{\psi}}{2} = \Delta\tilde{\varphi}, \quad (5.19)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{c + 2c_{\text{rel}}(1 + \cos(\frac{\Delta\tilde{\psi}}{2}))}{m}} \Leftrightarrow \frac{\Delta\tilde{\psi}}{2} = \Delta\tilde{\varphi} - \pi. \quad (5.20)$$

Mit diesem Ergebnis wird deutlich, dass zu einem Harmonischen Index für das zyklische Segment genau zwei Eigenformen des Modells mit einem Schwinger gehören, die sich in ihrem Phasenversatz um  $\pi$  unterscheiden. Zwischen zwei A-Swingern, die mit  $\Delta\tilde{\psi}$  phasenversetzt schwingen kann der dazwischenliegende B-Schwinger nur einen Phasenversatz von  $\Delta\tilde{\varphi}$  bzw.  $\Delta\tilde{\varphi} - \pi$  zum vorhergehenden Schwinger aufweisen. Ausschließlich für diese beiden Werte des Phasenwinkels wird die durch den Harmonischen Index geforderte Beziehung

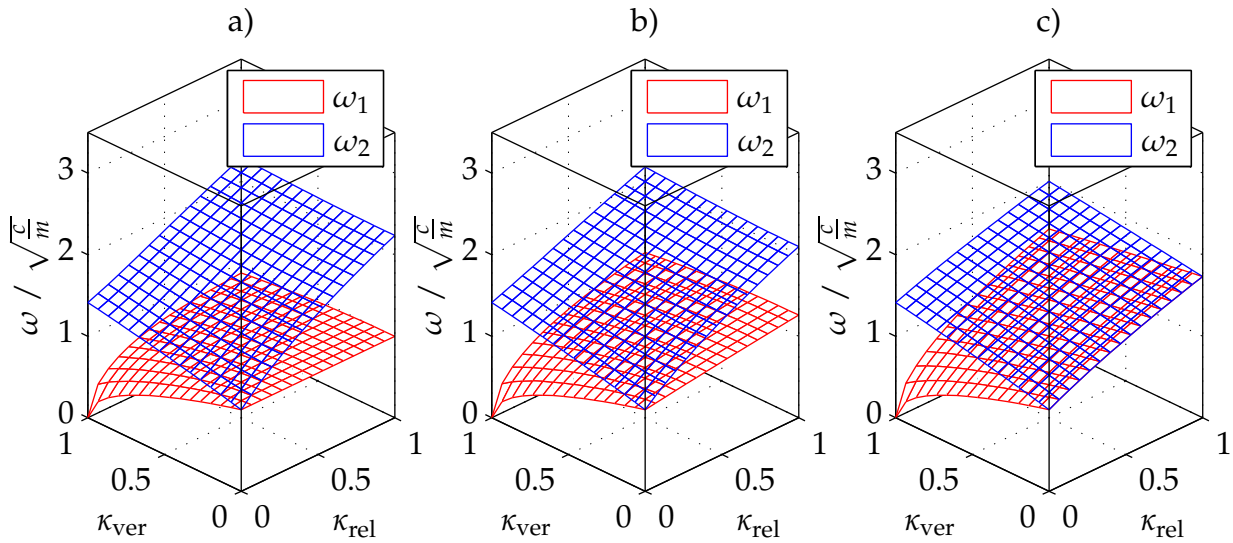
$$\Delta\tilde{\psi} = 2(\Delta\tilde{\varphi} - \pi) = 2\Delta\tilde{\varphi} - 2\pi = 2\Delta\tilde{\varphi} \quad (5.21)$$

zwischen den Segmenträndern erfüllt. Diese Betrachtung gilt genauso für ein verstimmtes Modell, wenn keine dämpfenden Elemente vorhanden sind oder die Dämpfung die Eigenvektoren des Systems nicht verändert, vgl. Abschnitt 2.3.2 zur Definition der Dämpfung. Auch wenn zwei verschiedene Schwingertypen A und B durch eine Frequenzverstimmung im Segment vorliegen weisen damit die beiden Eigenformen die gleichen Werte für den Phasenversatz auf, wie im Fall des unverstimmten Systems. Lediglich die Amplitude der beiden Schwinger kann sich im Betrag unterscheiden und ist vom Maß der Verstimmung abhängig.

Eine Frequenzverstimmung durch Veränderung der Federsteifigkeiten ermöglicht eine anschauliche analytische Lösung des Eigenwertproblems, weil sich diese direkt proportional zum Quadrat der Eigenfrequenzen verhalten. Eine Veränderung der Massen wirkt sich ebenfalls direkt auf die Eigenfrequenzen der Schwinger aus, jedoch umgekehrt proportional zum Quadrat der Eigenfrequenzen und erschwert damit eine analytische Betrachtung. Die alternierende Frequenzverstimmung wird daher im Folgenden in Form einer symmetrischen Verstimmung der Schwingersteifigkeiten angewendet. Die Verstimmung wird mit  $c_A = (1 - \kappa_{\text{ver}})c$  und  $c_B = (1 + \kappa_{\text{ver}})c$  symmetrisch auf beide Schwinger verteilt, sodass der arithmetische Mittelwert der verstimmten Federsteifigkeiten der unverstimmten Konfiguration entspricht. Die Massen bleiben mit  $m_A = m_B = m$  unverstimmt. Die relative Kopplung wird über  $c_{\text{rel}} = \kappa_{\text{rel}}c$  auf die inertielle Kopplung bezogen und aus Gl. (5.15) folgt

$$\begin{bmatrix} (1 - \kappa_{\text{ver}} + 2\kappa_{\text{rel}})c - \omega^2 m & -\kappa_{\text{rel}}(1 + e^{-i2\Delta\tilde{\varphi}})c \\ -\kappa_{\text{rel}}(1 + e^{+i2\Delta\tilde{\varphi}})c & (1 + \kappa_{\text{ver}} + 2\kappa_{\text{rel}})c - \omega^2 m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{A,j} \\ \hat{x}_{B,j} \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (5.22)$$

Aufgrund der Gültigkeit von Gl. (5.21) kann  $\Delta\tilde{\psi}$  durch  $2\Delta\tilde{\varphi}$  ersetzt werden. Dabei ist zu beachten, dass sich die wählbaren Werte auf  $-\frac{\pi}{2} \leq \Delta\tilde{\varphi} \leq \frac{\pi}{2}$  reduzieren. Schwingungs-



**Bild 5.6:** Eigenkreisfrequenzen  $\omega_{1/2}$  in Abhängigkeit der Verstimmung  $\kappa_{\text{ver}}$  und der Kopplung  $\kappa_{\text{rel}}$ ; a)  $\Delta\tilde{\varphi} = 0^\circ, \Delta\tilde{\varphi} - \pi = -180^\circ$ ; b)  $\Delta\tilde{\varphi} = 45^\circ, \Delta\tilde{\varphi} - \pi = -135^\circ$ ; c)  $\Delta\tilde{\varphi} = 90^\circ, \Delta\tilde{\varphi} - \pi = -90^\circ$

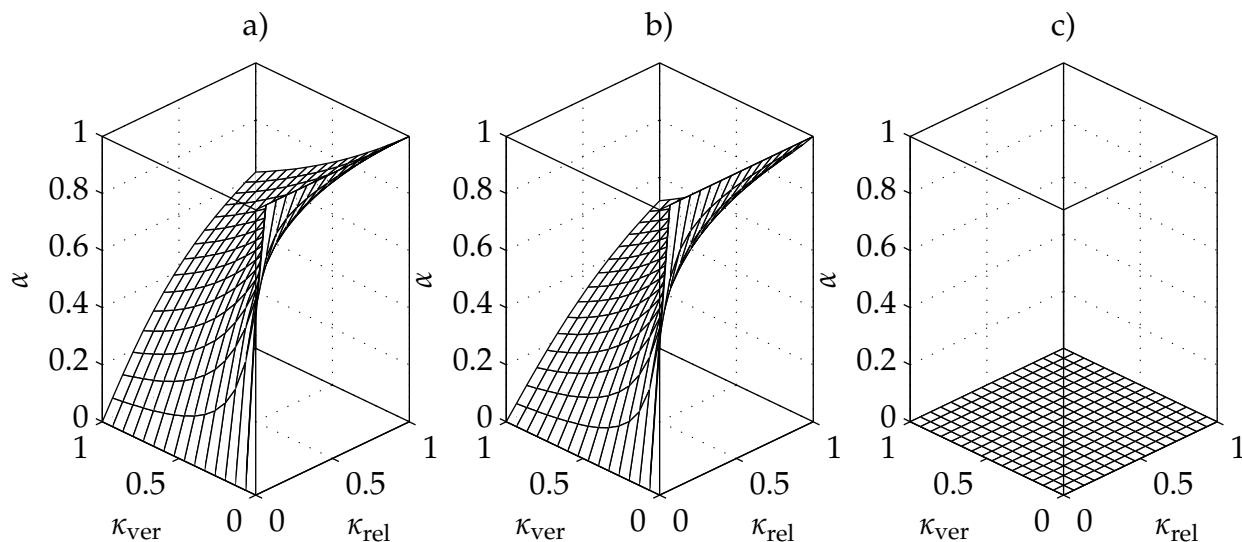
formen mit  $\frac{\pi}{2} \leq \Delta\tilde{\varphi} \leq \pi$ , bzw.  $-\frac{\pi}{2} \geq \Delta\tilde{\varphi} \geq -\pi$  sind in der Lösung als zweite Eigenform enthalten, sodass der Wertebereich des Phasenversatzes  $\Delta\tilde{\varphi}$  wieder dem des Systems mit einem Schwinger je Segment entspricht. Die Wahl des Phasenversatzes  $\Delta\tilde{\varphi}$  zwischen A- und B-Schwinger zur Beschreibung der Systemdynamik dient der Anschaulichkeit der folgenden analytischen Berechnungen und hilft dabei die Beziehung zwischen den verstimmtten Schwingern aufzuzeigen. Bei numerischen Untersuchungen des zyklischen Segments ist hingegen die gängige Verwendung des Phasenwinkels  $\Delta\tilde{\psi}$  zwischen den Segmenträndern vorteilhaft.

Die detailliert beschriebene Berechnung der Eigenfrequenzen kann in Kapitel A im Anhang gefunden werden und ergibt

$$\omega_{1/2}^2 = \frac{c}{m}(1 + 2\kappa_{\text{rel}}) \pm \frac{c}{m} \sqrt{\kappa_{\text{ver}}^2 + 4\kappa_{\text{rel}}^2 \cos^2 \Delta\tilde{\varphi}}. \quad (5.23)$$

**Bild 5.6** zeigt die Eigenfrequenzen  $\omega_{1/2}$  in Abhängigkeit der relativen Kopplung und der Verstimmung für verschiedene Phasenversatzwinkel  $\Delta\tilde{\varphi}$ , bzw.  $\Delta\tilde{\varphi} - \pi$  für die zweite Eigenform. Für das entkoppelte System  $\kappa_{\text{rel}} = 0$  sind die Verläufe der Eigenfrequenzen unabhängig von dem Phasenversatz der Schwingungsform. Im Fall ohne Verstimmung  $\kappa_{\text{ver}} = 0$  verändert sich der Abstand zwischen beiden Frequenzen linear mit der relativen Kopplung. Mit zunehmendem Phasenwinkel nähern sich die Verläufe an, bis sie bei  $\Delta\tilde{\varphi} = 90^\circ$  bzw.  $\Delta\tilde{\varphi} = -90^\circ$  zusammenfallen. Das System weist in diesem Fall einen doppelten Eigenwert auf und das Gleichungssystem Gl. (5.22) ist entkoppelt. Für alle übrigen Fälle ergeben sich für einen festen Wert der mechanischen Kopplung zwei verschiedene Eigenfrequenzen. Mit zunehmenden Werten von  $\kappa_{\text{ver}}$  wächst dabei auch der Abstand der Frequenzwerte stetig an.

Durch Einsetzen der Eigenkreisfrequenzen  $\omega_{1/2}$  in Gl. (5.22) werden die Eigenvektoren



**Bild 5.7:** Verhältnisfaktor  $\alpha$  in Abhängigkeit der Verstimmung  $\kappa_{\text{ver}}$  und der Kopplung  $\kappa_{\text{rel}}$ ; a)  $\Delta\tilde{\varphi} = 0^\circ, \Delta\tilde{\varphi} - \pi = -180^\circ$ ; b)  $\Delta\tilde{\varphi} = 45^\circ, \Delta\tilde{\varphi} - \pi = -135^\circ$ ; c)  $\Delta\tilde{\varphi} = 90^\circ, \Delta\tilde{\varphi} - \pi = -90^\circ$

$\phi_1$  und  $\phi_2$  ermittelt

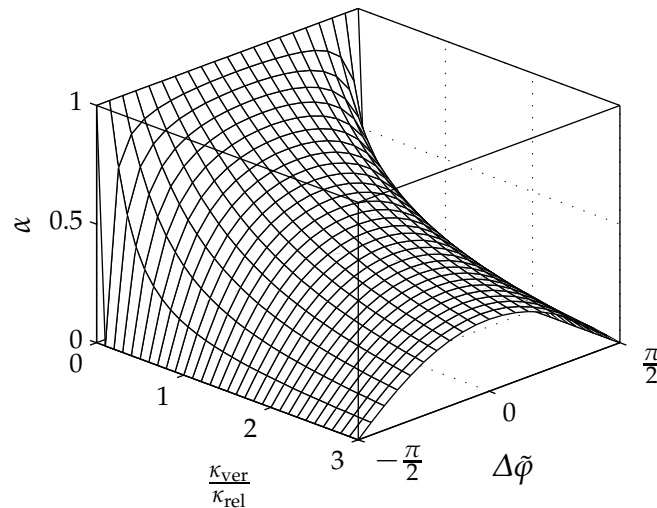
$$\phi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha e^{+i\Delta\tilde{\varphi}} \end{bmatrix} ; \phi_2 = \begin{bmatrix} -\alpha e^{-i\Delta\tilde{\varphi}} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5.24)$$

Beide Schwingungsformen sind jeweils auf den dominanten Schwinger normiert, sodass sich die Komponente des Zweiten mit dem Faktor

$$\alpha(\kappa_{\text{ver}}, \kappa_{\text{rel}}, \Delta\tilde{\varphi}) = \frac{\sqrt{\left(\frac{\kappa_{\text{ver}}}{\kappa_{\text{rel}}}\right)^2 + 4 \cos^2 \Delta\tilde{\varphi}} - \frac{\kappa_{\text{ver}}}{\kappa_{\text{rel}}}}{2 \cos \Delta\tilde{\varphi}}, \quad (5.25)$$

beschreiben lässt. Gl. (5.25) gibt das Verhältnis der Beträge der beiden Komponenten des Eigenvektors an. Die Berechnung der Eigenvektoren kann in Kapitel A im Anhang nachvollzogen werden. In **Bild 5.7** ist der Faktor  $\alpha$  für verschiedene Phasenversatzwinkel  $\Delta\tilde{\varphi}$ , bzw.  $\Delta\tilde{\varphi} - \pi$  graphisch dargestellt. Es ist zu erkennen, dass  $\alpha$  mit steigender Verstimmung  $\kappa_{\text{ver}}$  schnell abnimmt. Die Kopplung der beiden Schwinger hemmt diesen Abfall. Ein zunehmendes  $\kappa_{\text{rel}}$  wirkt dem Einfluss der Verstimmung entgegen. Das Verhältnis zwischen der Verstimmung und der Kopplung bestimmt das Ausmaß der Frequenzverstimmung auf die Eigenformen des Systems. Für das unverstimmte System mit  $\kappa_{\text{ver}} = 0$  folgt  $\alpha = 1$  und eine verschwindende Kopplung führt auf  $\alpha \rightarrow 0$ . Der doppelte Eigenwert für  $\Delta\tilde{\varphi} = 90^\circ$  bzw.  $\Delta\tilde{\varphi} = -90^\circ$  führt mit  $\alpha = 0$  auf eine Entkopplung der Schwinger. Der dabei auftretende unbestimmte Ausdruck für  $\cos \Delta\tilde{\varphi} \rightarrow 0$  ist mit der Regel von DE L'HOSPITAL auf seinen Grenzwert überprüft worden und kann im Anhang Kapitel B nachvollzogen werden.

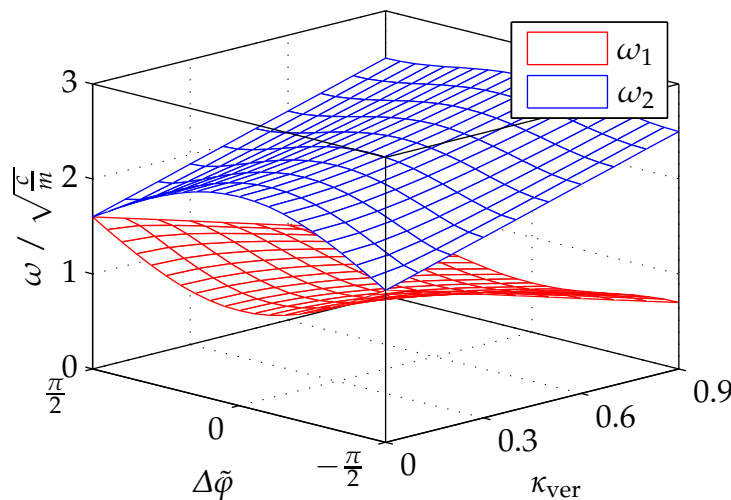
In **Bild 5.8** ist der Verlauf des Faktors  $\alpha$  über  $\Delta\tilde{\varphi}$  und dem Verhältnis  $\kappa_{\text{ver}}/\kappa_{\text{rel}}$  kontinuierlich aufgetragen. Es ist allerdings zu beachten, dass der Phasenversatz  $\Delta\tilde{\varphi}$  je nach Anzahl der Schaufeln im Rotor nur eine begrenzte Anzahl diskreter Werte annehmen kann. Der



**Bild 5.8:** Verhältnisfaktor  $\alpha$  in Abhängigkeit des Verhältnisses  $\kappa_{\text{ver}}/\kappa_{\text{rel}}$  und des Phasenwinkels  $\Delta\tilde{\varphi}$

Verhältnisfaktor  $\alpha$  weist für betragsgleiche Werte von  $\Delta\tilde{\varphi}$  eine Symmetrie auf, was die symmetrische Verstimmung der Schwinger widerspiegelt. Das Verhältnis  $\kappa_{\text{ver}}/\kappa_{\text{rel}}$  beeinflusst den Verlauf von  $\alpha$  und zeigt für geringe Werte eine nur geringe Verstimmung über einen weiten Bereich des Phasenversatzes. Es wird deutlich, dass eine alternierende Verstimmung immer in Zusammenhang mit der relativen Kopplung, also der Nachgiebigkeit der Scheibenstruktur, bewertet werden muss.

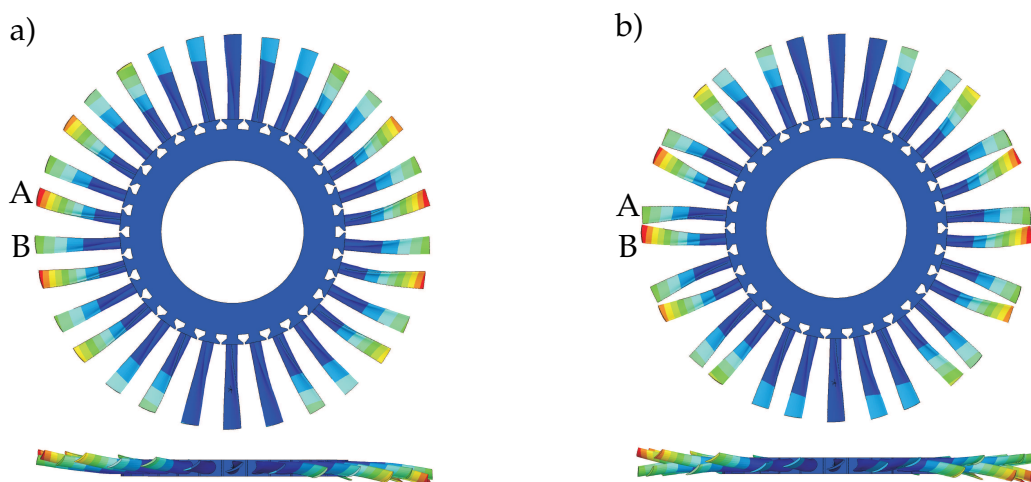
Die Eigenkreisfrequenzen können nicht in Abhängigkeit des Verhältnisses  $\kappa_{\text{ver}}/\kappa_{\text{rel}}$  beschrieben werden, jedoch ist auch hier die Symmetrie erkennbar. **Bild 5.9** zeigt für  $\kappa_{\text{rel}} = 0.3$  die Verläufe der Eigenfrequenzen  $\omega_{1/2}$  über dem Phasenversatzwinkel  $\Delta\tilde{\varphi}$  und der Verstimmung  $\kappa_{\text{ver}}$ . Es wird deutlich, dass bei der gewählten symmetrischen Verstimmung die erste Eigenform eine geringere Frequenz aufweist, als die zweite Eigenform, abgesehen von den doppelten Eigenwerten bei  $\Delta\tilde{\varphi} = \pm 90^\circ$ .



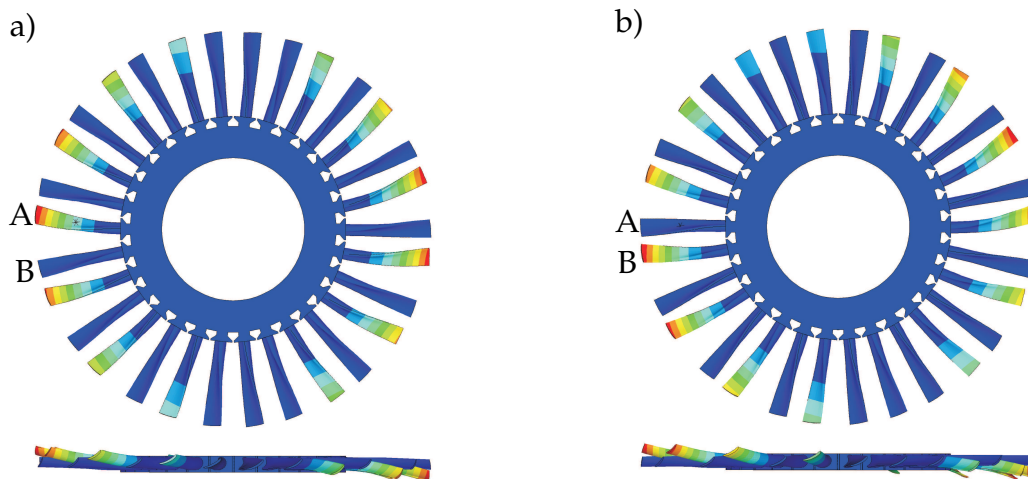
**Bild 5.9:** Eigenkreisfrequenzen  $\omega_{1/2}$  des alternierend verstimmten Systems in Abhängigkeit von  $\kappa_{\text{ver}}$  und  $\Delta\tilde{\varphi}$  bei  $\kappa_{\text{rel}} = 0.3$

### 5.3 Modalanalyse eines Finite Elemente Schaufelkranzes mit alternierender Frequenzverstimmung

Mit den gewonnenen Erkenntnissen aus der Untersuchung des alternierend verstimmten Minimalmodells werden im Folgenden Modalanalyseergebnisse des eingangs dieses Kapitels vorgestellten Finite Elemente Schaufelkranzes mit alternierender Verstimmung betrachtet. Zur Berücksichtigung der Verstimmung jeder zweiten Schaufel ist ein Segment bestehend aus zwei Schaufeln mit zyklischen Randbedingungen in Ansys erstellt worden. Die im Folgenden mit A referenzierten Schaufeln sind mit Zusatzmassen versehen, sodass die isolierte Schaufeleigenfrequenz gegenüber der Frequenz im unverstimmten Fall absinkt. Die restlichen mit B bezeichneten Schaufeln bleiben unverändert. **Bild 5.10** zeigt qualitativ das Ergebnis der Modalanalyse mit  $HI = 1$  für eine leichte Verstimmung der Schaufeln. Für einen Schaufelkranz mit insgesamt 30 Schaufeln folgt für ein zyklisches Segment mit zwei Schaufeln nach Gl. (5.14) der Phasenwinkel  $\Delta\tilde{\varphi} = 24^\circ$ . Dieser Winkel ist der Phasenversatz zwischen einer Schaufel und der übernächsten Schaufel im Kranz. Die dazwischenliegenden Schaufeln schwingen in der ersten Mode mit  $\Delta\tilde{\varphi} = 12^\circ$  und in der Zweiten mit  $\Delta\tilde{\varphi} - \pi = -168^\circ$  Phasenversatz zur vorhergehenden Schaufel. Die zweite Schwingungsform entspricht damit der in **Bild 5.1** am Anfang dieses Kapitels gezeigten Verformung für  $HI = 14$  der unverstimmten Struktur. Durch die alternierende Verstimmung unterscheiden sich die Beträge der Eigenvektoren der verschiedenen Schaufeln, wobei je nach Eigenform ein Schaufeltyp dominant ist, d. h. einen größeren Betrag im Eigenvektor aufweist. In **Bild 5.10 a)** ist die A-Schaufel mit Zusatzmasse dominant und in **Bild 5.10 b)** ist die steifere B-Schaufel dominant. Die beiden Schaufeltypen sind exemplarisch für jeweils ein Segment in **Bild 5.10** und **Bild 5.11** benannt. **Bild 5.11** zeigt die Modalanalyseergebnisse für eine starke alternierende Verstimmung. Unterschiede in den Eigenformen sind nicht mehr eindeutig zu erkennen. Aufgrund der Skalierung



**Bild 5.10:** Modalanalyseergebnisse der alternierend verstimmten Struktur für den Harmonischen Index  $HI = 1$  mit leichter Verstimmung. a) Erste Biegeschwingungsform mit  $\Delta\tilde{\varphi} = 12^\circ$ ; b) Erste Biegeschwingungsform mit  $\Delta\tilde{\varphi} = -168^\circ$



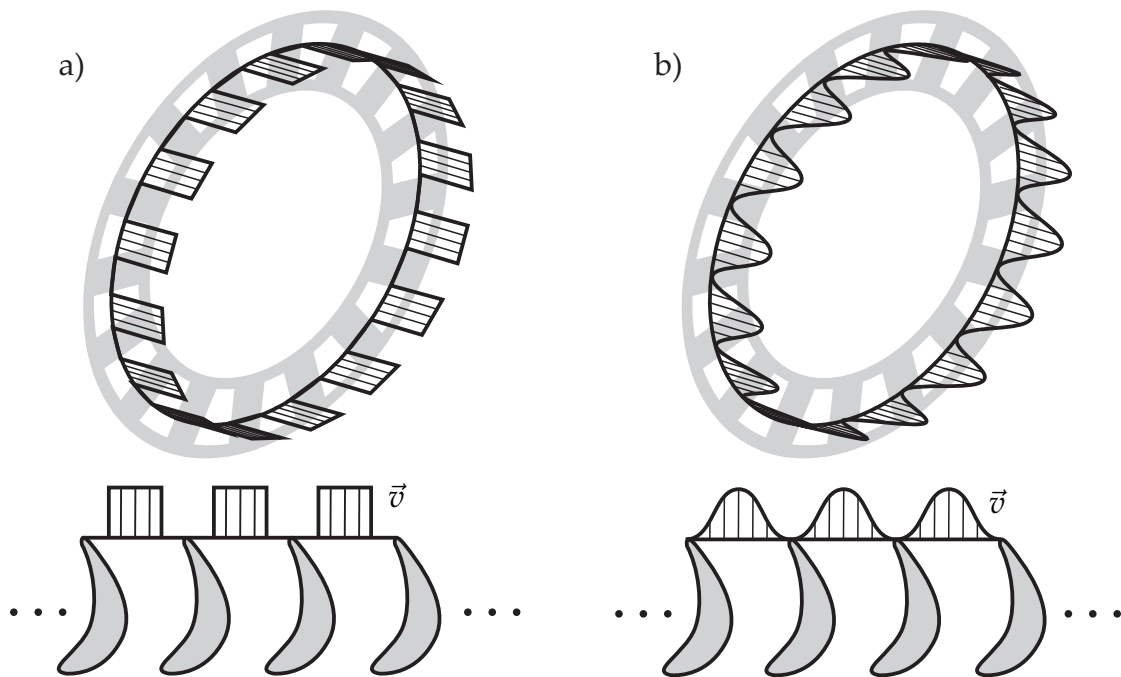
**Bild 5.11:** Modalanalyseergebnisse der alternierend verstimmten Struktur für den Harmonischen Index  $HI = 1$  mit starker Verstimmung. a) Erste Biegeschwingungsform mit  $\Delta\bar{\varphi} = 12^\circ$ ; b) Erste Biegeschwingungsform mit  $\Delta\bar{\varphi} = -168^\circ$

scheint sowohl in **Bild 5.11 a)**, als auch in **Bild 5.11 b)** jede zweite Schaufel keinen Ausschlag aufzuweisen. Trotzdem können die Eigenformen eindeutig zugeordnet werden. Die Eigenform mit der niedrigeren Frequenz, bei der sich die A-Schaufeln dominant bewegen, beschreibt die Schwingung mit Phasenversatz  $\Delta\bar{\varphi}$ . Die zweite Eigenform mit der höheren Frequenz und sichtbarer Verschiebung der B-Schaufeln weist entsprechend der in Abschnitt 5.2 angeführten Überlegungen einen Phasenversatz  $\Delta\bar{\varphi} - \pi$  auf. Für den Sonderfall  $\Delta\bar{\varphi} = 90^\circ$ , bzw.  $\Delta\bar{\varphi} - \pi = -90^\circ$  besitzt das System einen doppelten Eigenwert und die Eigenvektoren sind identisch. Mit den gewonnenen Erkenntnissen lassen sich Modalanalyseergebnisse von Schaufelkränzen mit alternierender Frequenzverstimmung der Schaufeln interpretieren und Eigenformen eindeutig zuordnen.

## 5.4 Modellierung der Anregung

Die Anregung wird auf Basis der in der Literatur genannten Düsenerregung modelliert, die eine wichtige Quelle für Fremderregung in Turbomaschinen darstellt. Die Nachlaufdellen einer Leitbeschaufelung können aufgrund der Gitterstruktur von Schaufelkränzen als periodische Funktion um den Umfang dargestellt werden. **Bild 5.12** zeigt zwei mögliche vereinfachte Modellierungsansätze. Die Unterbrechung der Nachlaufströmung durch die Schaufeln kann in Form einer Stufenfunktion angenähert werden die noch mit einem Gleichanteil überlagert werden kann, siehe **Bild 5.12 a)**. Die Fourierreihenentwicklung dieser Verteilung zeigt eine Hauptanregung durch die Grundharmonische mit der gleichen Periodizität. In **Bild 5.12 b)** ist die Nachlaufströmung harmonisch dargestellt, was der Grundharmonischen des Rechteckverlaufs entspricht. Nach TRAUPEL [97, S. 436] kann jede periodische Erregerkraftverteilung in ihre harmonischen Bestandteile zerlegt und jeweils über einen Stimulus berücksichtigt werden. Der Stimulus  $S_h$  für die  $h$ -te harmonische Komponente des Erregerspektrums ist definiert als Proportionali-





**Bild 5.12:** Modellierung des Kraftverlaufs durch eine Leitbeschaukelung mit 16 Schaufeln aufgrund periodisch auftretender Nachlaufdellen; a) Rechteckimpulse; b) Sinusverlauf

tätsfaktor zwischen der Erregerkraftamplitude  $\hat{F}_{Er,h}$  und dem zeitlichen Mittelwert  $\bar{F}_{Er,h}$  dieser Komponente

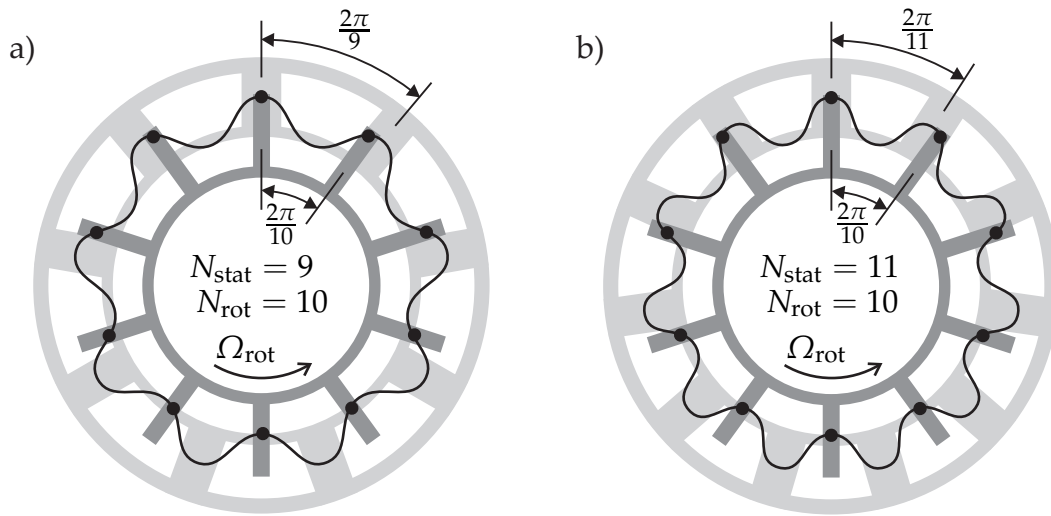
$$\hat{F}_{Er,h} = S_h \bar{F}_{Er,h} \quad (5.26)$$

Der mit der Drehzahl bzw. der Rotationskreisfrequenz  $\Omega_{rot}$  rotierende Schaufelkranz erfährt durch die Relativbewegung der Schaufelgitter nur Kräfte, deren harmonische Bestandteile als Vielfache von  $\Omega_{rot}$  entwickelbar sind. Diese Vielfachen werden über die Erregerordnung  $EO$  beschrieben. Die Frequenz der Kraftanregung an einer rotierenden Schaufel ist damit über

$$\Omega_{Er} = EO \Omega_{rot} \quad (5.27)$$

festgelegt. Häufig wird eine kritische Erregerordnung über ein Campbelldiagramm identifiziert und eine harmonische Analyse allein mit dieser Erregerordnung durchgeführt, vgl. **Bild 2.8**. Die Erregerordnung beschreibt die Anzahl der statorfesten Sinuswellen über den Umfang. In **Bild 5.12** sind 16 Statorschaufeln und ebenso viele Rechteckimpulse, bzw. Sinuswellen zu erkennen. Die Erregerordnung dieses Gitters beträgt damit  $EO = 16$ . Dreht sich der Rotor einmal um seine eigene Achse werden an jeder Rotorschaukel entsprechend 16 Perioden der Anregung durchlaufen. Die durch eine Erregerordnung angeregten Schwingungsformen des rotierenden Schaufelkranzes sind zusätzlich von der Anzahl der Rotorschaukeln abhängig.

**Bild 5.13** zeigt eine vereinfachte Darstellung eines Rotorschaukelkranzes mit zehn Schaufeln. In **Bild 5.13 a)** ist im Hintergrund ein Statorschaukelkranz mit neun Schaufeln und im **Bild 5.13 b)** ein Statorschaukelkranz mit elf Schaufeln dargestellt. Die Nachlaufströ-



**Bild 5.13:** Vereinfachte Darstellung einer Paarung von Stator- und Rotorschaukelkranz mit in die Ebene projizierten Kraftverläufen aus Nachlaufdüellen; a) Erregerordnung bzw. Statorschaufelanzahl = 9; b) Erregerordnung bzw. Statorschaufelanzahl = 11

mungsverteilung ist für die bessere Übersichtlichkeit in die Ebene der Darstellung als Welle um den Umfang projiziert. An den Stellen der Statorschaufeln und exakt zwischen zwei Statorschaufeln befindet sich jeweils ein Extremwert des Kraftverlaufs. Jede Schaukel fährt diesen Anregungsverlauf während einer Umdrehung ab. Je nach Anzahlen der Stator- und Rotorschaukeln stellt sich ein für die jeweilige Kombination charakteristischer Phasenversatz der Erregerkräfte an benachbarten Rotorschaukeln ein. Mit den Schaukelteilungswinkeln  $\delta_{\text{rot}}$  und  $\delta_{\text{stat}}$  für die rotor-, bzw. statorseitige Schaukelanordnung und der Erregerordnung zur Berücksichtigung der Periodizität der Anregung folgt

$$\Delta\varphi = (\delta_{\text{rot}} - \delta_{\text{stat}})EO = \frac{2\pi EO}{N_{\text{rot}}} - \frac{2\pi EO}{N_{\text{stat}}} = \frac{2\pi EO}{N_{\text{rot}}} - 2\pi = \frac{2\pi EO}{N_{\text{rot}}}. \quad (5.28)$$

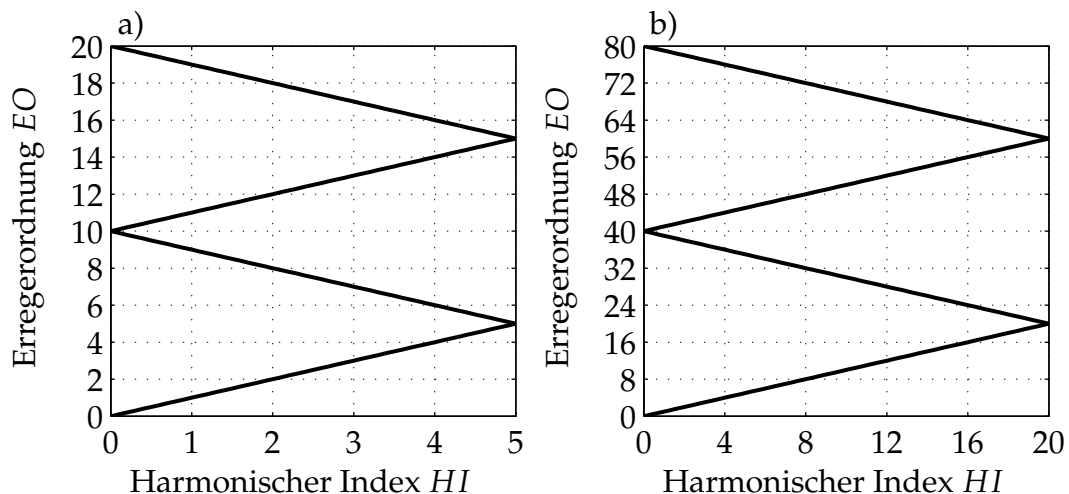
Die Erregerordnung ist bei der Düsenanregung identisch zu der Statorschaufelanzahl, sodass sich der Wert  $2\pi$  in Gl. (5.28) ergibt. Die  $2\pi$ -Periodizität der Anregung erlaubt die Vereinfachung in Gl. (5.28) zu einem Ausdruck, der nur die Erregerordnung und die Anzahl der Rotorschaukeln enthält. Für die in **Bild 5.13** gezeigten Beispiele folgen die Phasenversatzwinkel

$$\Delta\varphi_{9,10} = \frac{2\pi 9}{10} \hat{=} 324^\circ = -36^\circ, \quad (5.29)$$

$$\Delta\varphi_{11,10} = \frac{2\pi 11}{10} \hat{=} 396^\circ = +36^\circ, \quad (5.30)$$

wobei sich die Indizes auf die entsprechenden Werte für  $EO$  und  $N_{\text{rot}}$  beziehen. Die Schaukeln des Rotors antworten auf diese phasenversetzte Anregung ausschließlich mit dem gleichen relativen Phasenversatz, was in dem folgenden Abschnitt 5.5 ausführlich hergeleitet wird. Ein Vergleich mit dem in Gl. (5.5) definierten Harmonischen Index zeigt, dass zu den vorliegenden Phasenversatzwerten der gleiche Harmonische Index  $HI = 1$





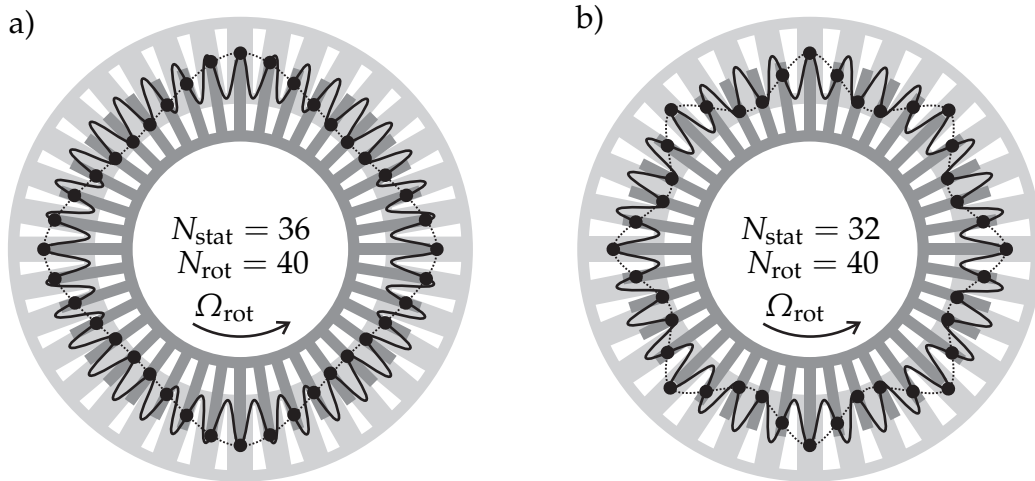
**Bild 5.14:** Darstellung der Erregerordnung über dem Harmonischen Index für zwei verschiedene Laufschaufelzahlen; a) Rotor mit 10 Schaufeln; b) Rotor mit 40 Schaufeln

zugeordnet ist

$$\Delta\tilde{\varphi} = \pm \frac{2\pi}{N_{\text{rot}}} \hat{=} \pm 36^\circ. \quad (5.31)$$

Das Vorzeichen des Phasenversatzes der Anregung gibt dabei die augenscheinliche Ausbreitungsrichtung der umlaufenden Schaufelbewegungen an. Je nach Rotationsrichtung sind die Bezeichnungen vorwärts, bzw. in Drehrichtung und rückwärts, bzw. gegen die Drehrichtung, verbreitet. Die Beziehung zwischen der Erregerordnung und dem Harmonischen Index kann in einem Diagramm dargestellt werden, siehe **Bild 5.14**. Die Steigung der linearen Abschnitte korreliert mit dem Vorzeichen des Phasenversatzwinkels  $\Delta\tilde{\varphi}$ . Die Spiegelung des funktionalen Zusammenhangs an der Vertikalen bei der halben Schaufelzahl ist auf den aus der Signalverarbeitung bekannten Aliasing-Effekt zurückzuführen. Die Abtastung des Erregerkraftverlaufs durch die diskreten Schaufeln am Rotor bildet einen harmonischen Verlauf, der maximal  $N_{\text{rot}}/2$  annehmen kann. Besonders deutlich wird dieser Effekt bei höheren Schaufelzahlen. In den Beispielen in **Bild 5.15** sind passend zu **Bild 5.14 b)**  $N_{\text{rot}} = 40$  Schaufeln vorhanden. Der Harmonische Index lässt sich durch die Verbindung der Abtastpunkte als Zahl der entstehenden Sinuswellen erfassen. **Bild 5.15 a)** zeigt einen Harmonischen Index  $HI = 4$  mit vier um den Umfang erkennbaren Sinuswellen und **Bild 5.15 b)** ergibt mit  $N_{\text{stat}} = 32$  einen Harmonischen Index  $HI = 8$  für die Schwingungsform des Rotors. Es wird deutlich, dass eine Paketschwingungsform mit einem charakteristischen Phasenversatz beschrieben durch den Harmonischen Index  $HI$  durch theoretisch unendlich viele Erregerordnungen angeregt werden kann. Die Anzahl der Statorschaufeln bestimmt die Erregerordnung und damit die Frequenz der Anregung in Abhängigkeit von der Rotordrehzahl.

Für die in den vorangegangenen Abschnitten vorgestellten Minimalmodelle ist eine Einzelkraft für jeden Schwinger, die in Richtung des Freiheitsgrads wirkt, ausreichend. Die Anregungskräfte aller Schwinger lassen sich mit dem Phasenversatz  $\Delta\varphi$  in einem Vektor



**Bild 5.15:** Vereinfachte Darstellung einer Paarung von Stator- und Rotorschaukelkranz mit 40 Rotorschaukeln; a) Erregerordnung bzw. Statorschaukelanzahl = 36; b) Erregerordnung bzw. Statorschaukelanzahl = 32

zusammenfassen

$$\mathbf{F}_{\text{Er}} = \hat{F}_{\text{Er}} \begin{bmatrix} \cos(\Omega_{\text{Er}}t) \\ \cos(\Omega_{\text{Er}}t + \Delta\varphi) \\ \cos(\Omega_{\text{Er}}t + 2\Delta\varphi) \\ \vdots \\ \cos(\Omega_{\text{Er}}t + (N_{\text{rot}} - 1)\Delta\varphi) \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

Das Vorzeichen des Phasenversatzes in Gl. (5.32) ist zusammen mit der Definition in Gl. (5.28), der Zählrichtung der Schaukeln am Kranz und der Rotationsrichtung zu interpretieren. Unter Anwendung der zyklischen Symmetrie vereinfacht sich die Beschreibung der Erregerkräfte, weil der Phasenversatz in den komplexen Randbedingungen enthalten ist. Die Betrachtung des Minimalmodells für einen unverstimmten Schaukelkranz führt auf eine Einzelkraft im Segment

$$F_{\text{Er}} = \hat{F}_{\text{Er}} \cos(\Omega_{\text{Er}}t). \quad (5.33)$$

Ein Segment mit zwei benachbarten Schwingern benötigt zur Beschreibung der Erregerkräfte zusätzlich die Phaseninformation der Anregung. Der Erregerkraftvektor des zyklischen Segments mit A- und B-Schwinger lautet

$$\mathbf{F}_{\text{Er},s} = \hat{F}_{\text{Er}} \begin{bmatrix} \cos(\Omega_{\text{Er}}t) \\ \cos(\Omega_{\text{Er}}t + \Delta\varphi) \end{bmatrix}. \quad (5.34)$$

Die Erregerkräfte können ebenso, wie die Bewegung des Systems in die komplexe Ebene erweitert und als Realteil eines umlaufenden Zeigers betrachtet werden. Gl. (5.34) wird damit überführt in

$$\underline{\mathbf{F}}_{\text{Er},s} = \hat{F}_{\text{Er}} e^{i\Omega_{\text{Er}}t} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{+i\Delta\varphi} \end{bmatrix}. \quad (5.35)$$

## 5.5 Anregbarkeit des Systems

Bei der in Abschnitt 5.4 beschriebenen Düsenanregung werden nur Schwingungsformen angeregt, die einen Phasenversatz zwischen benachbarten Schwingern entsprechend der Anregung aufweisen. In der mathematischen Beschreibung des Systems stehen die Eigenvektoren der übrigen Schwingungsformen orthogonal zu dem Erregerkraftvektor und das Produkt aus beiden verschwindet. In diesem Abschnitt wird der formale Zusammenhang der Orthogonalitätsbedingung zwischen Erregerkraftvektor und Schwingungsform hergeleitet und anschließend für ein alternierend verstimmtes zyklisches System erweitert. Für alternierend verstimmte Systeme wird gezeigt, dass Schwingungsformen mit zwei verschiedenen Phasenversatzwinkeln durch eine Erregerordnung angeregt werden.

### 5.5.1 Anregbarkeit des unverstimmten Systems

Für die Orthogonalitätsbedingung muss das Gesamtsystem aller Schwinger, bzw. Schaufeln, betrachtet werden. Ein zyklisches Segment ist zur Beschreibung der Anregbarkeit des geschlossenen Systems nicht ausreichend. Die Bewegung eines ungedämpften Schaufelkranzes lässt sich allgemein durch folgende Differentialgleichung beschreiben

$$M\ddot{u} + Ku = F_{Er}. \quad (5.36)$$

$M$  und  $K$  beschreiben die Massen- und Steifigkeitsmatrix und  $F_{Er}$  ist der Vektor äußerer Erregerkräfte. Dämpfung kann vernachlässigt werden, sofern diese bei späterer Ergänzung die Eigenformen nicht verändert. Nach Abschnitt 2.3.2 ist die Proportionaldämpfung oder eine modale Dämpfung hierfür geeignet. Falls ein Segment des Schaufelkranzes mehrere Freiheitsgrade aufweist sind  $M$  und  $K$  blockzyklische Matrizen, die auf der Hauptdiagonalen mit den Matrizen der Segmente besetzt sind. Für die folgenden Erklärungen ist das in dieser Arbeit vorgestellte Minimalmodell mit einem Freiheitsgrad je Segment jedoch ausreichend und die Ergebnisse können direkt auf blockzyklische Systeme übertragen werden, vgl. OLSON ET AL. [63].

Eine Modalanalyse des Systems in Gl. (5.36) liefert die Modalmatrix  $\Phi$  der Eigenvektoren und die Modaltransformation der Bewegungsgleichung führt damit auf

$$\Phi^H M \Phi \ddot{q} + \Phi^H K \Phi q = \Phi^H F_{Er}. \quad (5.37)$$

Die Modaltransformation erfordert die mit Index H gekennzeichnete hermitesch transponierte<sup>1</sup> Matrix zur Projektion auf komplexe Eigenformen. Die Modalmatrix  $\Phi$  lässt sich bei zyklischen Systemen mit einem Freiheitsgrad je Segment direkt in Form der aus der

<sup>1</sup>hermitesch transponiert entspricht bei komplexen Matrizen der transponierten Matrix mit konjugiert komplexen Einträgen

Signalanalyse bekannten Fourierreihe darstellen, vgl. Abschnitt 2.3.3. Jede Spalte dieser Matrix stellt einen Eigenvektor dar und beschreibt eine komplexe Eigenschwingungsform mit passendem Phasenversatz  $\Delta\tilde{\varphi}$  zwischen benachbarten Schwingern. Die Gesamtheit der Eigenvektoren eines Systems mit  $N$  Segmenten wird mit komplexer Erweiterung beschrieben durch

$$\underline{\phi}_{HI} = [1 \ e^{-i\Delta\tilde{\varphi}} \ e^{-i2\Delta\tilde{\varphi}} \ \dots \ e^{-i(N-1)\Delta\tilde{\varphi}}]^H, \quad (5.38)$$

mit

$$\Delta\tilde{\varphi} = \pm \frac{2\pi HI}{N}; \quad HI = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2}. \quad (5.39)$$

Der Erregerkraftvektor des Gesamtsystems lautet in komplex erweiterter Schreibweise

$$\underline{F}_{Er} = \hat{\underline{F}}_{Er} e^{i\Omega_{Er}t} [1 \ e^{-i\Delta\varphi} \ e^{-i2\Delta\varphi} \ \dots \ e^{-i(N-1)\Delta\varphi}]^H, \quad (5.40)$$

mit dem über die Erregerordnung  $EO$  festgelegten Phasenversatz

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi EO}{N}; \quad EO = 0, 1, 2, \dots \quad (5.41)$$

der im Gegensatz zu Gl. (5.39) nicht begrenzt ist. Die rechte Seite der modalen Beschreibung des Systems in Gl. (5.37) stellt die modalen Erregerkräfte dar. Wird eine Schwingungsform durch äußere Kräfte angeregt, so ist ein entsprechender Eintrag im Vektor der modalen Erregerkräfte vorhanden. Ist eine Schwingungsform nicht anregbar nimmt das Skalarprodukt des zugehörigen Eigenvektors mit dem Erregerkraftvektor den Wert Null an. Die Vektoren sind dann orthogonal. Die Bedingung für die Anregbarkeit einer Schwingungsform folgt damit zu

$$\underline{\phi}_{HI}^H \underline{F}_{Er} \neq 0. \quad (5.42)$$

Einsetzen von Gl. (5.38) und Gl. (5.40) in die Orthogonalitätsbedingung führt auf die komplexe Summe

$$\underline{\phi}_{HI}^H \underline{F}_{Er} = \hat{\underline{F}}_{Er} e^{i\Omega_{Er}t} (1 + e^{i(\Delta\varphi - \Delta\tilde{\varphi})} + e^{i2(\Delta\varphi - \Delta\tilde{\varphi})} + \dots + e^{i(N-1)(\Delta\varphi - \Delta\tilde{\varphi})}), \quad (5.43)$$

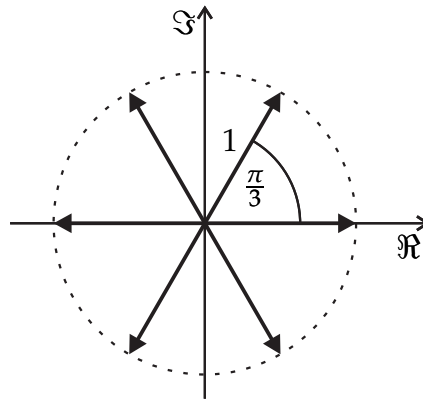
die abgekürzt werden kann durch

$$\underline{\phi}_{HI}^H \underline{F}_{Er} = \hat{\underline{F}}_{Er} e^{i\Omega_{Er}t} \sum_{n=0}^{N-1} e^{in(\Delta\varphi - \Delta\tilde{\varphi})}. \quad (5.44)$$

Die Summe in Gl. (5.44) muss von Null verschieden sein, damit Gl. (5.42) erfüllt ist, womit die Orthogonalitätsbedingung umformuliert werden kann zu

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{in(\Delta\varphi - \Delta\tilde{\varphi})} \neq 0. \quad (5.45)$$

Gl. (5.45) wird mit dem Ausdruck  $(e^{i(\Delta\varphi - \Delta\tilde{\varphi})} - 1)$  multipliziert, was geometrisch einer Drehung in der komplexen Ebene und eine Subtraktion der Summe von den gedrehten Werten entspricht. Da jeder Summand auf den Einheitskreis zeigt und gleiche Winkel zwischen den komplexen Zeigern vorhanden sind bleibt nur ein komplexer Ausdruck übrig. Zur Veranschaulichung ist ein konkretes Beispiel der komplexen Summe in **Bild 5.16**



**Bild 5.16:** Darstellung der komplexen aus Summanden Gl. (5.45) für den Fall  $N = 6$  und  $\Delta\varphi - \Delta\tilde{\varphi} = \pi/3$

dargestellt. Die Bedingung in Gl. (5.45) kann mit der Bildung des Produkts überführt werden in

$$(e^{i(\Delta\varphi - \Delta\tilde{\varphi})} - 1) \sum_{n=0}^{N-1} e^{in(\Delta\varphi - \Delta\tilde{\varphi})} = \underbrace{e^{iN(\Delta\varphi - \Delta\tilde{\varphi})} - 1}_{=0}. \quad (5.46)$$

Die rechte Seite von Gl. (5.46) ist immer Null, weil sich durch Multiplikation mit  $N$  nach Gl. (5.39) und Gl. (5.41) ganzzahlige Vielfache von  $2\pi$  im Exponenten ergeben. Die erste Klammer auf der linken Seite in Gl. (5.46) wird für  $\Delta\varphi = \Delta\tilde{\varphi}$  zu Null. Darüber hinaus führen Phasenwinkel der Erregung, die um Vielfache von  $2\pi$  erhöht sind zum Verschwinden der Klammer. Die komplexe Summe folgt in diesen Fällen zu  $1 + 1 + 1 + \dots + 1 = N$ . Für alle anderen Fälle muss folglich die komplexe Summe und damit die modale Anregung selbst Null sein. Damit wird deutlich, dass eine Erregerordnung genau eine komplexe Schwingungsform anregt und zu den übrigen Eigenformen orthogonal ist. Eine Schwingungsform lässt sich hingegen durch unendlich viele Erregerordnungen anregen.

Der stückweise lineare Zusammenhang zwischen der Erregerordnung  $EO$  und dem Harmonischen Index  $HI$  ist für zwei Beispiele in Abschnitt 5.4 in **Bild 5.14** graphisch dargestellt. Der Harmonische Index beschreibt durch die Berücksichtigung konjugiert komplexer Eigenvektoren den Bereich  $-180^\circ \leq \Delta\tilde{\varphi} \leq 180^\circ$ . Zu einem Wert  $HI$  gehören damit zwei Schwingungsformen, deren Phasenwinkel betragsgleich, jedoch von verschiedenem Vorzeichen sind. Für den Bereich  $0 \leq EO/N \leq 1$  folgen die beiden Geradengleichungen mit den zugehörigen Phasenwinkeln zu

$$0 \leq \frac{EO}{N} \leq \frac{1}{2} : HI = EO ; \Delta\tilde{\varphi} = +\frac{2\pi HI}{N} \quad (5.47)$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{EO}{N} \leq 1 : HI = -EO + N ; \Delta\tilde{\varphi} = -\frac{2\pi HI}{N}. \quad (5.48)$$

Die aus der Orthogonalitätsbedingung abgeleiteten Beziehungen in Gl. (5.47) und Gl. (5.48), sowie entsprechende Gleichungen für höhere Erregerordnungen, sind bei der Wahl des Phasenwinkels  $\Delta\tilde{\varphi}$  eines zyklischen Ersatzsegments zu berücksichtigen.

## 5.5.2 Anregbarkeit des alternierend verstimzten Systems

Bei einem alternierend verstimzten System können die Eigenvektoren benachbarter Schwinger durch eine Skalierung mit dem Faktor  $\alpha$  beschrieben werden, vgl. Gl. (5.24). Die Bedingung für die Anregbarkeit aus Gl. (5.45) ergibt sich für ein alternierend verstimztes System somit zu

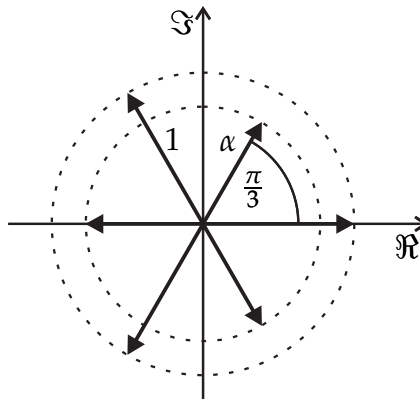
$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^{(n \bmod 2)} e^{in(\Delta\varphi - \Delta\tilde{\varphi})} \neq 0, \quad (5.49)$$

wobei die Abkürzung mod im Exponenten des Faktors  $\alpha$  für den Modulo-Operator steht und  $(n \bmod 2)$  jeweils den Rest der Ganzzahldivision von  $n/2$  ergibt. Mit  $\alpha^0$  und  $\alpha^1$  im Wechsel als Vorfaktor der e-Funktion wird so die alternierende Skalierung berücksichtigt.

Gl. (5.49) wird mit dem Ausdruck  $(e^{i2(\Delta\varphi - \Delta\tilde{\varphi})} - 1)$  multipliziert, sodass die komplexen Summanden nach einer Drehung auf komplexen Zeigern gleicher Länge liegen und sich aufheben. Es folgt

$$(e^{i2(\Delta\varphi - \Delta\tilde{\varphi})} - 1) \sum_{n=0}^{N-1} \alpha^{(n \bmod 2)} e^{in(\Delta\varphi - \Delta\tilde{\varphi})} = \underbrace{e^{iN(\Delta\varphi - \Delta\tilde{\varphi})} - 1}_{=0}, \quad (5.50)$$

wobei der Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung wie im vorherigen Abschnitt aufgrund der  $2\pi$ -Periodizität verschwindet. **Bild 5.17** zeigt ein konkretes Beispiel für den alternierend verstimzten Fall. Der Ausdruck  $(e^{i2(\Delta\varphi - \Delta\tilde{\varphi})} - 1)$  in Gl. (5.50) verschwindet für  $\Delta\varphi = \Delta\tilde{\varphi}$  sowie um Vielfache von  $2\pi$  erhöhte Werte des Phasenwinkels der Anregung. Zusätzlich ist im verstimzten Fall für  $\Delta\varphi - \Delta\tilde{\varphi} = \pm\pi$  eine modale Anregungskraft möglich, was einer Schwingungsform mit um  $\pi$  versetztem Phasenwinkel zwischen benachbarten Schwingern gegenüber der ersten Lösung entspricht. Auch hier sind Vielfache möglich, welche sich auf die gleiche Schwingungsform beziehen. Für andere Schwingungsformen muss die komplexe Summe Null sein und es ist keine Anregung möglich. Die Faktoren für die modalen Erregerkräfte der beiden anregbaren Schwingungsformen



**Bild 5.17:** Darstellung der komplexen Summanden des alternierend verstimzten Systems für den Fall  $N = 6$  und  $\Delta\varphi - \Delta\tilde{\varphi} = \pi/3$

ergeben sich nach Auswertung der komplexe Summe zu

$$1 + \alpha + 1 + \dots + \alpha = \frac{N}{2}(1 + \alpha) \quad \text{für } \Delta\varphi = \Delta\tilde{\varphi} \quad (5.51)$$

$$1 - \alpha + 1 - \dots + \alpha = \frac{N}{2}(1 - \alpha) \quad \text{für } \Delta\varphi = \Delta\tilde{\varphi} - \pi, \quad (5.52)$$

wobei um Vielfache von  $2\pi$  erhöhte Werte des Phasenversatzes der Erregung hier nicht mit angegeben sind. Eine Erregerordnung bewirkt damit hauptsächlich die Anregung von Schwingungsformen, welche mit  $\Delta\varphi = \Delta\tilde{\varphi}$  den Phasenversatz der Anregung aufweisen. Nach Gl. (5.52) sind zusätzlich um  $\pi$  versetzte Schwingungsformen durch die gleiche Erregerordnung anregbar, falls das System mit  $\alpha \neq 1$  verstimmt ist. Für das Segment mit zwei Schwingern ist der Phasenversatz definiert durch

$$\Delta\tilde{\psi} = \pm \frac{4\pi HI}{N} \quad \text{mit } HI = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{4}. \quad (5.53)$$

Mit den folgenden Beziehungen wird der Zusammenhang zwischen Erregerordnung  $EO$  und Harmonischem Index  $HI$  für ein verstimmtes System aufgezeigt. Mit dem Phasenwinkel  $\Delta\varphi$  der Anregung wird der entsprechende Phasenversatz  $\Delta\tilde{\varphi}$  und die um  $\pi$  versetzte Schwingungsform angeregt. Damit diese Bedingung erfüllt wird und die beteiligten Parameter innerhalb der definierten Grenzen liegen müssen für den Bereich  $0 \leq EO/N \leq 1$  die nachfolgend aufgeführten Beziehungen gelten

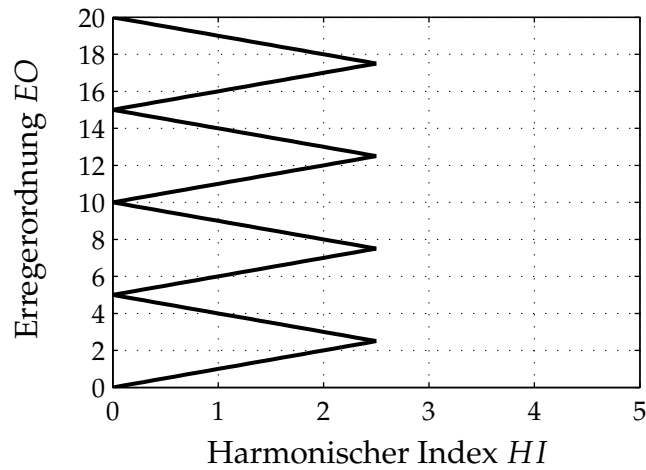
$$0 \leq \frac{EO}{N} \leq \frac{1}{4} : HI = EO \quad ; \quad \Delta\tilde{\psi} = +\frac{4\pi HI}{N} \quad (5.54)$$

$$\frac{1}{4} \leq \frac{EO}{N} \leq \frac{1}{2} : HI = -EO + \frac{N}{2} \quad ; \quad \Delta\tilde{\psi} = -\frac{4\pi HI}{N} \quad (5.55)$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{EO}{N} \leq \frac{3}{4} : HI = EO + \frac{N}{2} \quad ; \quad \Delta\tilde{\psi} = +\frac{4\pi HI}{N} \quad (5.56)$$

$$\frac{3}{4} \leq \frac{EO}{N} \leq 1 : HI = -EO + N \quad ; \quad \Delta\tilde{\psi} = -\frac{4\pi HI}{N}. \quad (5.57)$$

Für höhere Werte von  $EO/N$  können entsprechende Gleichungen formuliert werden. Die Gültigkeit der genannten Zusammenhänge wird mit Hilfe des folgenden Zahlenbeispiels veranschaulicht. Für einen Schaufelkranz mit  $N = 10$  Schaufeln ergibt sich der in **Bild 5.18** graphisch dargestellte Zusammenhang zwischen Erregerordnung und Harmonischem Index. Ein Vergleich mit **Bild 5.14 a)** für das gleiche unverstimmte System mit einem Schwinger je Segment lässt die Spiegelung an der Vertikalen bei  $HI = N/4$  erkennen. Für die Erregerordnungen  $EO = 1$  und  $EO = 4$ , die beide dem Harmonischen Index  $HI = 1$  zugeordnet sind, werden die Phasenwinkel der Anregung und die Phasenwinkel der angeregten Schwingungsformen des Systems bestimmt. Der Phasenversatz der hauptsächlich angeregten Schwingungsform ist mit dem Zusatz *primär* versehen und entspricht dem durch die Anregung vorgegebenen Phasenwinkel  $\Delta\varphi$ . Die um  $\pi$  versetzte Schwingungsform wird mit *sekundär* bezeichnet. Die im Folgenden angegebenen Phasenwinkel  $\Delta\tilde{\varphi}$  sind für die Vergleichbarkeit nach der Definition im unverstimmten System an den Wertebereich  $-180^\circ \leq \Delta\tilde{\varphi} \leq 180^\circ$  angepasst. Für den ersten Schnittpunkt der



**Bild 5.18:** Darstellung der Erregerordnung über dem Harmonischen Index für einen Rotor mit 10 Schaufeln und zwei Schaufeln je Segment

Vertikalen bei  $HI = 1$  in **Bild 5.18** gehört die Erregerordnung  $EO = 1$ . Mit  $N = 10$  gilt Gl. (5.54) und es folgt

$$EO = 1 : \Delta\varphi = \frac{2\pi 1}{N} = \frac{\pi}{5} \Leftrightarrow HI = 1 : \Delta\tilde{\psi} = +\frac{4\pi 1}{N} = \frac{2\pi}{5} \quad (5.58)$$

$$\Rightarrow \Delta\tilde{\varphi} = \frac{\pi}{5} \text{ (primär)} \quad (5.59)$$

$$\Rightarrow \Delta\tilde{\varphi} = \frac{\pi}{5} - \pi = -\frac{4\pi}{5} \text{ (sekundär)}. \quad (5.60)$$

Der zweite Schnittpunkt von  $HI = 1$  wird mit  $EO = 4$  erreicht und die Phasenwinkel folgen nach Gl. (5.55) zu

$$EO = 4 : \Delta\varphi = \frac{2\pi 4}{N} = \frac{4\pi}{5} \Leftrightarrow HI = 1 : \Delta\tilde{\psi} = -\frac{4\pi 1}{N} = -\frac{2\pi}{5} \quad (5.61)$$

$$\Rightarrow \Delta\tilde{\varphi} = -\frac{\pi}{5} \text{ (sekundär)} \quad (5.62)$$

$$\Rightarrow \Delta\tilde{\varphi} = -\frac{\pi}{5} + \pi = \frac{4\pi}{5} \text{ (primär)}. \quad (5.63)$$

Die Schwingungsantwort ist durch den Phasenversatz der Anregung geprägt und enthält aufgrund der alternierenden Verstimmung einen zusätzlichen Anteil, mit  $180^\circ$  Phasenversatz. Entsprechend lassen sich die Zusammenhänge für die weiteren Erregerordnungen im ersten Intervall  $0 \leq EO/N \leq 1$  ermitteln. Die in diesem Abschnitt beschriebenen Zusammenhänge zwischen Anregung und angeregter Schwingungsform werden im Folgenden bei der analytischen Bestimmung der Frequenzantwort des zyklischen Minimalmodells für die Interpretation der Ergebnisse verwendet.



## 5.6 Schwingungsantwort des linearen Systems

Im Folgenden wird die Schwingungsantwort des alternierend verstimmt Systems aus Abschnitt 5.2 ermittelt. Das komplex erweiterte Bewegungsgleichungssystem des Segments in Matrizenform lautet nach Anwendung der Modaltransformation

$$\underline{\Phi}_{AB}^H \underline{M}_{AB} \underline{\Phi}_{AB} \ddot{\underline{q}}_{AB} + \underline{\Phi}_{AB}^H \underline{K}_{AB} \underline{\Phi}_{AB} \underline{q}_{AB} = \underline{\Phi}_{AB}^H \underline{F}_{Er,AB}. \quad (5.64)$$

Die modalen Koordinaten  $\underline{q}_{AB} = [q_1 \ q_2]^T$  beziehen sich auf die beiden Eigenformen des Segments. Dämpfung wird für die Transformation vernachlässigt und anschließend in Form von modalen Dämpfungsgraden ohne Auswirkungen auf die Schwingungsformen ergänzt, vgl. Abschnitt 2.3.2. Der Index AB kennzeichnet die auf ein A-B-Segment reduzierte Form der Matrizen und Vektoren mit komplexen Randbedingungen. Das System wird mit der erregerordnungs-basierten zyklischen Kraft

$$\underline{F}_{Er,AB} = \hat{\underline{F}}_{Er} e^{i\Omega_{Er}t} = \hat{F}_{Er} e^{i\Omega_{Er}t} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{+i\Delta\varphi} \end{bmatrix}; \quad \Delta\varphi = \frac{2\pi EO}{N} \quad (5.65)$$

angeregt, vgl. Gl. (5.34). Die Steifigkeiten der Schwinger werden, wie in Abschnitt 5.2, über den Verstimmungsfaktor  $\kappa_{ver}$  verstimmt und das System entspricht der in Gl. (5.22) beschriebenen Struktur mit

$$\underline{M}_{AB} = \underline{M}_{AB} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}; \quad \underline{K}_{AB} = \begin{bmatrix} (1 - \kappa_{ver} + 2\kappa_{rel})c & -\kappa_{rel}(1 + e^{-i2\Delta\tilde{\varphi}})c \\ -\kappa_{rel}(1 + e^{+i2\Delta\tilde{\varphi}})c & (1 + \kappa_{ver} + 2\kappa_{rel})c \end{bmatrix}. \quad (5.66)$$

Die Modalmatrix  $\underline{\Phi}_{AB}$  enthält die Eigenvektoren aus Gl. (5.24) in massennormierter Form

$$\underline{\Phi}_{AB} = \frac{1}{\sqrt{m(1 + \alpha^2)}} \begin{bmatrix} 1 & -\alpha e^{-i\Delta\tilde{\varphi}} \\ \alpha e^{+i\Delta\tilde{\varphi}} & 1 \end{bmatrix}; \quad \Delta\tilde{\psi} = 2\Delta\tilde{\varphi} = \pm \frac{4\pi HI}{N}. \quad (5.67)$$

Die Bewegungsgleichung (5.64) wird zusammen mit Gl. (5.67) und dem Exponentialansatz  $\underline{q}_{AB} = \hat{\underline{q}}_{AB} e^{i\Omega_{Er}t}$  vom Typ der rechten Seite in den Frequenzbereich überführt. Mit den modalen Amplituden  $\hat{\underline{q}}_{AB}$  folgt

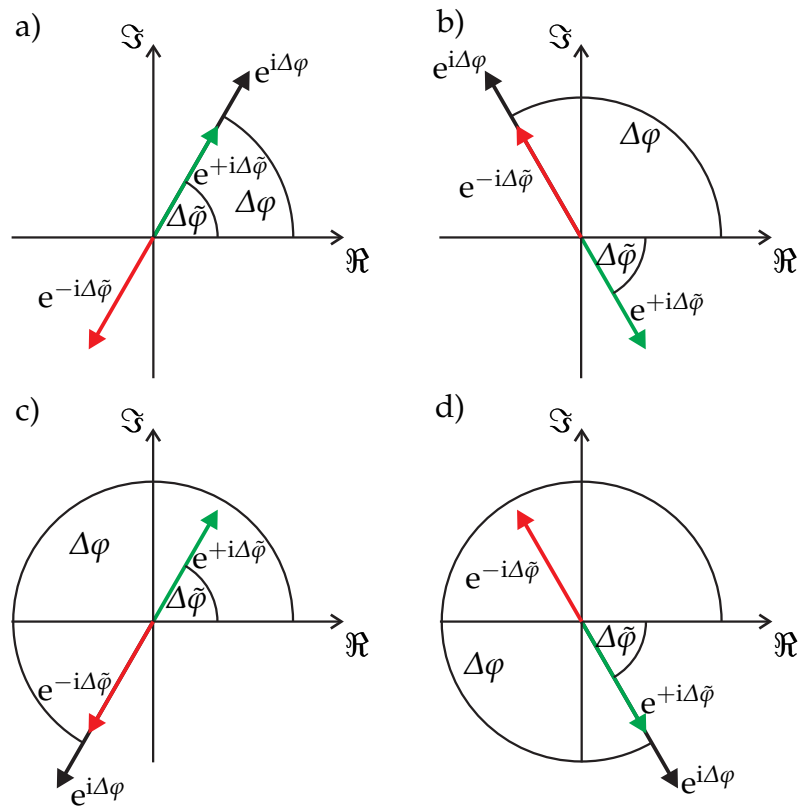
$$\left( -\underline{I}_{AB} \Omega_{Er}^2 + \underline{\Lambda}_{AB} \right) \hat{\underline{q}}_{AB} = \underline{\Phi}_{AB}^H \hat{\underline{F}}_{Er,AB}. \quad (5.68)$$

Die massennormierten Eigenvektoren transformieren die Massenmatrix in die Einheitsmatrix  $\underline{I}_{AB}$  und die Steifigkeitsmatrix in die Spektralmatrix  $\underline{\Lambda}_{AB}$  mit den in Gl. (5.23) angegebenen Eigenfrequenzen  $\omega_1$  und  $\omega_2$

$$\underline{I}_{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \underline{\Lambda}_{AB} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix}. \quad (5.69)$$

Die modale Bewegungsgleichung (5.68) wird um die modale Dämpfungsmatrix

$$\underline{D}_{mod,AB} = \begin{bmatrix} 2D_1\omega_1 & 0 \\ 0 & 2D_2\omega_2 \end{bmatrix} \quad (5.70)$$



**Bild 5.19:** Zeigerdarstellung des Phasenversatzes der Anregung und der Schwingungsform in der komplexen Ebene; a)  $0 \leq EO \leq \frac{N}{4}$ ; b)  $\frac{N}{4} \leq EO \leq \frac{N}{2}$ ; c)  $\frac{N}{2} \leq EO \leq \frac{3N}{4}$ ; d)  $\frac{3N}{4} \leq EO \leq N$

ergänzt.  $D_1$  und  $D_2$  sind die modalen Dämpfungsgrade der Schwingungsformen des Segments und die Bewegungsgleichung mit Dämpfung lautet

$$\left(-I_{AB}\Omega_{Er}^2 + i\Omega_{Er}D_{mod,AB} + \Lambda_{AB}\right)\hat{q}_{AB} = \underline{\Phi}_{AB}^H \hat{F}_{Er,AB}. \quad (5.71)$$

Es ist an dieser Stelle zu betonen, dass die modalen Dämpfungsgrade auf die Schwingungsformen des alternierend verstimmt und gekoppelten Systems bezogen sind. Auf diese Weise wird eine Abhängigkeit der Dämpfung von der Verstimmung, bzw. der Kopplung vermieden. Beobachtete Effekte bei einem Vergleich zwischen einer verstimmt und einer unverstimmt Konfiguration sind damit nicht auf Veränderungen des Dämpfungsgrads zurückzuführen. Gleiches gilt für den Vergleich unterschiedlicher Kopplungsfaktoren  $\kappa_{rel}$ .

Die rechte Seite von Gl. (5.71) beschreibt die modalen Amplituden der Erregerkräfte. Nach der in Abschnitt 5.5.2 ermittelten Bedingung der Anregbarkeit alternierend verstimmt Systeme werden zwei Schwingungsformen angeregt. Anhand der Erregerordnung ist zu prüfen welche Eigenform primär angeregt wird. Die Phasenversatzwinkel der beiden Schwingungsformen des Modells sind in **Bild 5.19** in Form komplexer Zeiger für verschiedene Bereiche der Erregerordnung im Intervall  $0 \leq EO \leq N$  dargestellt. Für  $EO > N$  werden die dargestellten Bereiche wiederholt durchlaufen. Es zeigt sich, dass in **Bild 5.19** a) und d) die Erregerordnung primär die erste Eigenform mit geringerer Ei-

genfrequenz anregt, in **Bild 5.19** b) und c) wird dagegen primär die zweite Eigenform mit höherer Eigenfrequenz angeregt. Es ist zu beachten, dass in den Fällen **Bild 5.19** b) und d)  $-\pi/2 \leq \Delta\tilde{\varphi} \leq 0$  gilt. Die folgende analytische Berechnung des Amplitudengangs ist daher in zwei Teillösungen gegliedert, die durch eine Fallunterscheidung in Abhängigkeit der Erregerordnung bestimmt werden.

Die Frequenzantwort des Systems kann in Abhängigkeit der Anregungsfrequenz  $\Omega_{\text{Er}}$  durch die Bestimmung der modalen Amplituden

$$\underline{\hat{q}}_{\text{AB}}(\Omega_{\text{Er}}) = \underline{\mathbf{S}}_{\text{mod}}^{-1}(\Omega_{\text{Er}}) \underline{\Phi}_{\text{AB}}^{\text{H}} \underline{\hat{\mathbf{F}}}_{\text{Er,AB}} \quad (5.72)$$

mit der modalen dynamischen Steifigkeitsmatrix

$$\underline{\mathbf{S}}_{\text{mod}}(\Omega_{\text{Er}}) = -\underline{\mathbf{I}}_{\text{AB}} \Omega_{\text{Er}}^2 + i\Omega_{\text{Er}} \underline{\mathbf{D}}_{\text{mod,AB}} + \underline{\mathbf{A}}_{\text{AB}} \quad (5.73)$$

ermittelt werden. Das Gleichungssystem in Gl. (5.72) ist entkoppelt und ermöglicht damit die direkte Berechnung der physikalischen Amplituden  $\underline{\hat{u}}_{\text{AB}}$  der Schwinger des Segments, welche mit Index A und Index B zur Unterscheidung der Schwinger bezeichnet werden. Die Modaltransformation kann mit den Eigenvektoren durch die folgende Summe dargestellt werden

$$\underline{\hat{u}}_{\text{AB}} = [\underline{\hat{u}}_{\text{A}} \quad \underline{\hat{u}}_{\text{B}}]^{\text{T}} = \underline{\Phi}_{\text{AB}} \underline{\hat{q}}_{\text{AB}} = \underline{\phi}_1 \underline{\hat{q}}_1 + \underline{\phi}_2 \underline{\hat{q}}_2. \quad (5.74)$$

Die modalen Amplituden  $\underline{\hat{q}}_1$  und  $\underline{\hat{q}}_2$  können aus Gl. (5.72) getrennt bestimmt werden und die physikalischen Verschiebungen ergeben sich damit zu

$$\underline{\hat{u}}_{\text{AB}} = \frac{\underline{\phi}_1 \underline{\phi}_1^{\text{H}} \underline{\hat{\mathbf{F}}}_{\text{Er,AB}}}{\omega_1^2 - \Omega_{\text{Er}}^2 + i2D_1\omega_1\Omega_{\text{Er}}} + \frac{\underline{\phi}_2 \underline{\phi}_2^{\text{H}} \underline{\hat{\mathbf{F}}}_{\text{Er,AB}}}{\omega_2^2 - \Omega_{\text{Er}}^2 + i2D_2\omega_2\Omega_{\text{Er}}}. \quad (5.75)$$

Die dyadischen Produkte der Eigenvektoren in Gl. (5.75) sind charakteristisch für die jeweilige Eigenform. Mit den analytisch beschriebenen Eigenvektoren ergeben sich die folgenden Matrizen

$$\underline{\phi}_1 \underline{\phi}_1^{\text{H}} = \frac{1}{m(1+\alpha^2)} \begin{bmatrix} 1 & \alpha e^{-i\Delta\tilde{\varphi}} \\ \alpha e^{+i\Delta\tilde{\varphi}} & \alpha^2 \end{bmatrix}, \quad (5.76)$$

$$\underline{\phi}_2 \underline{\phi}_2^{\text{H}} = \frac{1}{m(1+\alpha^2)} \begin{bmatrix} \alpha^2 & -\alpha e^{-i\Delta\tilde{\varphi}} \\ -\alpha e^{+i\Delta\tilde{\varphi}} & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.77)$$

Für den Erregerkraftvektor ist je nach Erregerordnungsbereich der passende Phasenversatz einzusetzen. Die erste Teillösung erfolgt für den Fall, dass die Anregung primär die erste Eigenform anregt. Die Erregerkraft folgt mit  $\Delta\varphi = \Delta\tilde{\varphi}$  zu

$$\underline{\hat{\mathbf{F}}}_{\text{Er,AB}} = \hat{\mathbf{F}}_{\text{Er,AB}} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{+i\Delta\tilde{\varphi}} \end{bmatrix} \quad \text{für } 0 \leq \frac{EO}{N} \leq \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad \frac{3}{4} \leq \frac{EO}{N} \leq 1. \quad (5.78)$$

Einsetzen von Gl. (5.78) in Gl. (5.75) zusammen mit den dyadischen Produkten aus

Gl. (5.76) und Gl. (5.77) führt auf den Amplitudengang

$$\hat{\underline{u}}_{AB,1} = \frac{\hat{F}_{Er,AB}}{m(1+\alpha^2)} \left( \frac{(1+\alpha) \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha e^{+i\Delta\tilde{\varphi}} \end{bmatrix}}{\omega_1^2 - \Omega_{Er}^2 + i2D_1\omega_1\Omega_{Er}} + \frac{(1-\alpha) \begin{bmatrix} -\alpha \\ e^{+i\Delta\tilde{\varphi}} \end{bmatrix}}{\omega_2^2 - \Omega_{Er}^2 + i2D_2\omega_2\Omega_{Er}} \right), \quad (5.79)$$

in dem die zweite Schwingungsform nur aufgrund der Verstimmung enthalten ist und für  $\alpha = 1$  verschwindet. Die zweite Teillösung ist durch eine primäre Anregung der zweiten Eigenform geprägt. Wie aus **Bild 5.19** hervorgeht folgt die Erregerkraft mit  $\Delta\varphi = \Delta\tilde{\varphi} - \pi$  zu

$$\underline{\hat{F}}_{Er,AB} = \hat{F}_{Er,AB} \begin{bmatrix} 1 \\ -e^{+i\Delta\tilde{\varphi}} \end{bmatrix} \quad \text{für} \quad \frac{1}{4} \leq \frac{EO}{N} \leq \frac{3}{4}. \quad (5.80)$$

Der Amplitudengang für den zweiten Bereich der Erregerordnung resultiert analog zu Gl. (5.79) zu

$$\hat{\underline{u}}_{AB,2} = \frac{\hat{F}_{Er,AB}}{m(1+\alpha^2)} \left( \frac{(1-\alpha) \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha e^{+i\Delta\tilde{\varphi}} \end{bmatrix}}{\omega_1^2 - \Omega_{Er}^2 + i2D_1\omega_1\Omega_{Er}} + \frac{(1+\alpha) \begin{bmatrix} \alpha \\ -e^{+i\Delta\tilde{\varphi}} \end{bmatrix}}{\omega_2^2 - \Omega_{Er}^2 + i2D_2\omega_2\Omega_{Er}} \right). \quad (5.81)$$

Mit steigender Verstimmung wächst der Einfluss der ersten Schwingungsform und beeinflusst zunehmend das Ergebnis. Die Gesamtheit der Lösung ist gegeben durch

$$\hat{\underline{u}}_{AB} = \begin{cases} \hat{\underline{u}}_{AB,1}, & \text{für } 0 \leq \frac{EO}{N} \leq \frac{1}{4} \text{ und } \frac{3}{4} \leq \frac{EO}{N} \leq 1, \\ \hat{\underline{u}}_{AB,2}, & \text{für } \frac{1}{4} \leq \frac{EO}{N} \leq \frac{3}{4}. \end{cases} \quad (5.82)$$

Für die folgenden graphisch dargestellten Amplitudengänge wird eine normierte Amplitude

$$\hat{\underline{u}}_{AB}^{\#} = \frac{\hat{\underline{u}}_{AB} m \omega_{1,0}^2}{\hat{F}_{Er}} \quad (5.83)$$

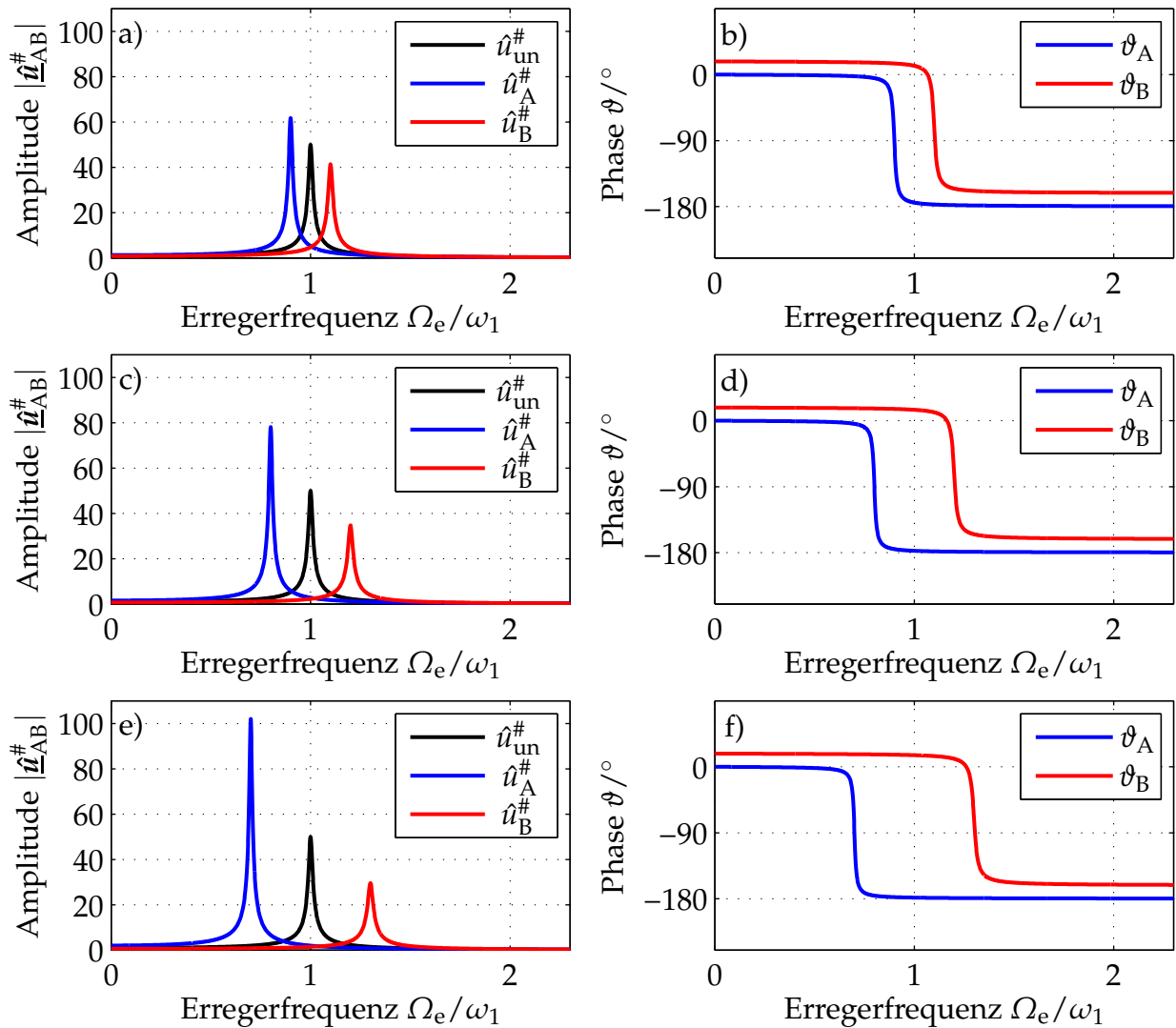
eingeführt, wobei  $\omega_{1,0}^2 = (1 + 2\kappa_{rel}(1 - \cos \Delta\tilde{\varphi}))/m$  die Eigenfrequenz der ersten Schwingungsform des gekoppelten, aber unverstimmten Systems beschreibt, vgl. Gl. (5.23). Die numerischen Ergebnisse sind in Form des Betrags der normierten Amplitude

$$|\hat{\underline{u}}_{AB}^{\#}| = \sqrt{\Re \{ \hat{\underline{u}}_{AB}^{\#} \}^2 + \Im \{ \hat{\underline{u}}_{AB}^{\#} \}^2} = [\hat{\underline{u}}_A^{\#} \ \hat{\underline{u}}_B^{\#}]^T, \quad (5.84)$$

sowie der Phase  $\vartheta$  zwischen Schwingungsanregung und Schwingungsantwort dargestellt, die für jeden Schwinger definiert ist durch

$$\tan \vartheta_A = \frac{\Im \{ \hat{\underline{u}}_A^{\#} \}}{\Re \{ \hat{\underline{u}}_A^{\#} \}}; \quad \tan \vartheta_B = \frac{\Im \{ \hat{\underline{u}}_B^{\#} \}}{\Re \{ \hat{\underline{u}}_B^{\#} \}}. \quad (5.85)$$

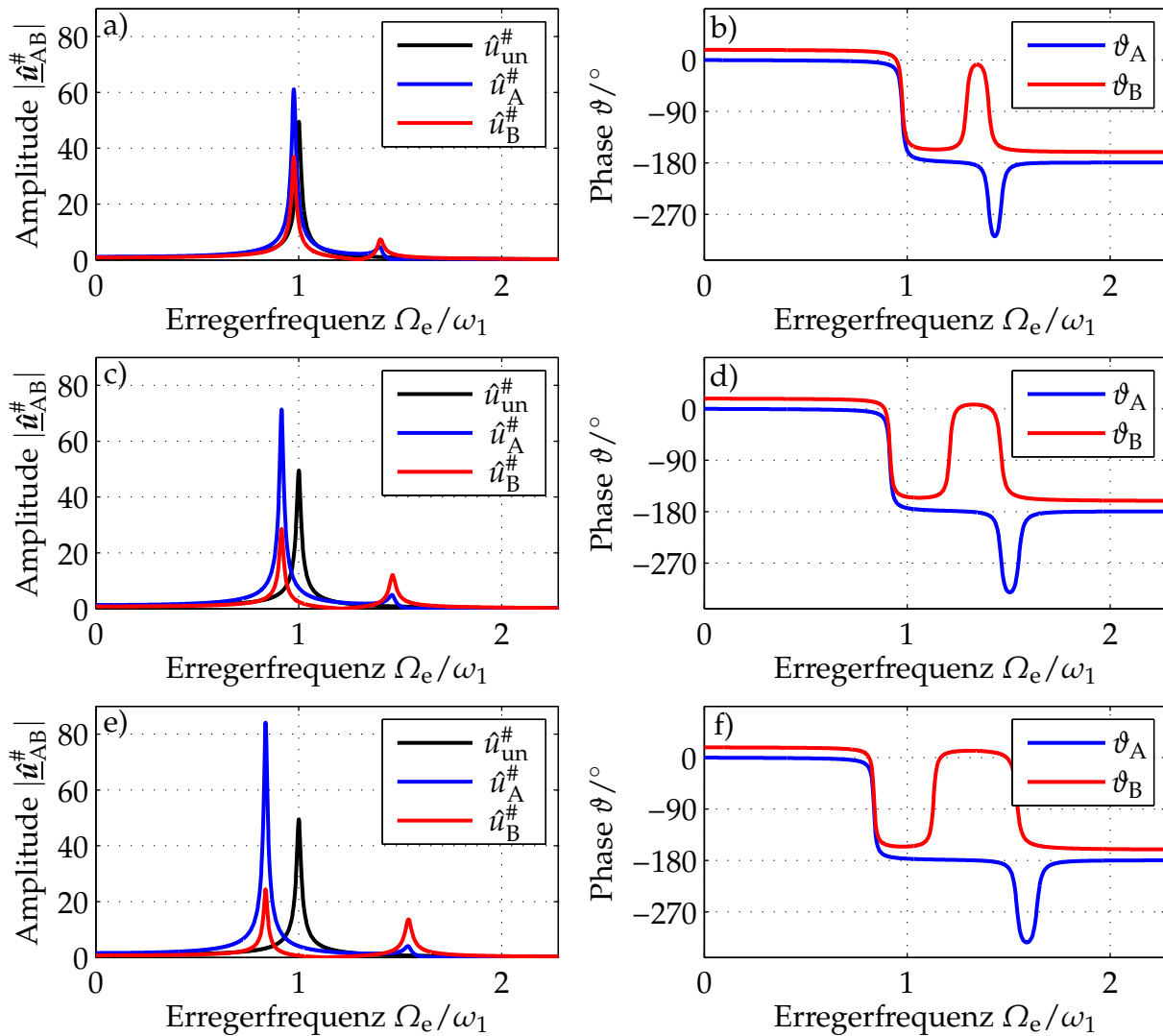
Die modalen Dämpfungsgrade werden für die folgenden Untersuchungen auf  $D_1 = D_2 = D = 0.01$  gesetzt. Als Bezug für die Phaseninformation in der Anregung wird die Anzahl der Schwinger des Gesamtsystems benötigt, welche auf  $N = 20$  für alle folgenden



**Bild 5.20:** Frequenzantworten des Systems mit  $\kappa_{\text{rel}} = 0$  und Erregerordnung  $EO = 1$ ; a) und b) Amplituden- und Phasengang bei  $\kappa_{\text{ver}} = 0.1$ ; c) und d) Amplituden- und Phasengang bei  $\kappa_{\text{ver}} = 0.2$ ; e) und f) Amplituden- und Phasengang bei  $\kappa_{\text{ver}} = 0.3$

Ergebnisse gleich gewählt wird. Für eine Erregerordnung von  $EO = 1$  werden jeweils die Amplitudengänge mit und ohne Relativkopplung ermittelt. Im Anschluss folgen die Ergebnisse mit Relativkopplung und  $EO = 9$ . Als Referenz ist jeweils der Amplitudengang des unverstimmten Systems abgebildet.

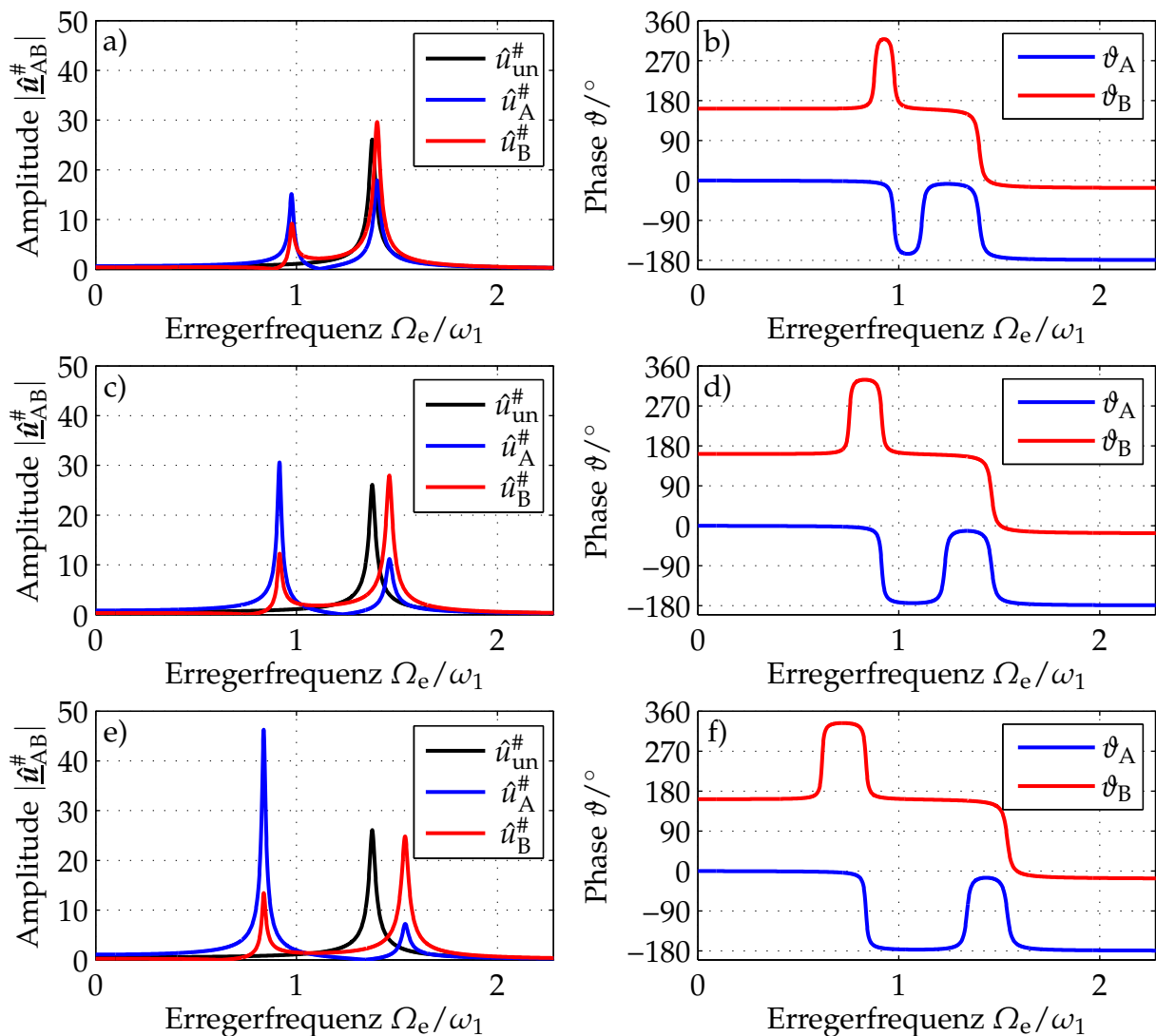
**Bild 5.20** zeigt das dynamische Verhalten des Systems mit  $\kappa_{\text{rel}} = 0$  für verschiedene Stufen der Verstimmung bei Anregung mit  $EO = 1$ . Das System antwortet mit dem Phasenversatz der Anregung  $\Delta\varphi = 2\pi/20 = 18^\circ$ , welcher als Differenz der Phasengänge bei  $\Omega_{\text{Er}} = 0$  Hz in **Bild 5.20** b), d) und f) erkennbar ist. Die Bestimmungsgleichung der Frequenzantwort für diesen Fall ist durch Gl. (5.79) gegeben und enthält wegen  $\kappa_{\text{rel}} = 0$  und damit  $\alpha = 0$  zwei entkoppelte Gleichungen, vgl. hierzu die Verläufe von  $\alpha$  in **Bild 5.7** auf Seite 45. Die Übertragungsfunktionen sind getrennt als Einfreiheitsgradschwinger interpretierbar, sodass die Amplitudenüberhöhung direkt an die individuelle Eigenfrequenz



**Bild 5.21:** Frequenzantworten des Systems mit  $\kappa_{rel} = 0.1$  und Erregerordnung  $EO = 1$ ; a) und b) Amplituden- und Phasengang bei  $\kappa_{ver} = 0.1$ ; c) und d) Amplituden- und Phasengang bei  $\kappa_{ver} = 0.2$ ; e) und f) Amplituden- und Phasengang bei  $\kappa_{ver} = 0.3$

gekoppelt ist. Aufgrund der Definition der symmetrisch verteilten Verstimmung folgt ohne Kopplung für den einen Schwinger eine höhere und für den anderen Schwinger eine niedrigere Schwingungsantwort, als im unverstimmten Fall.

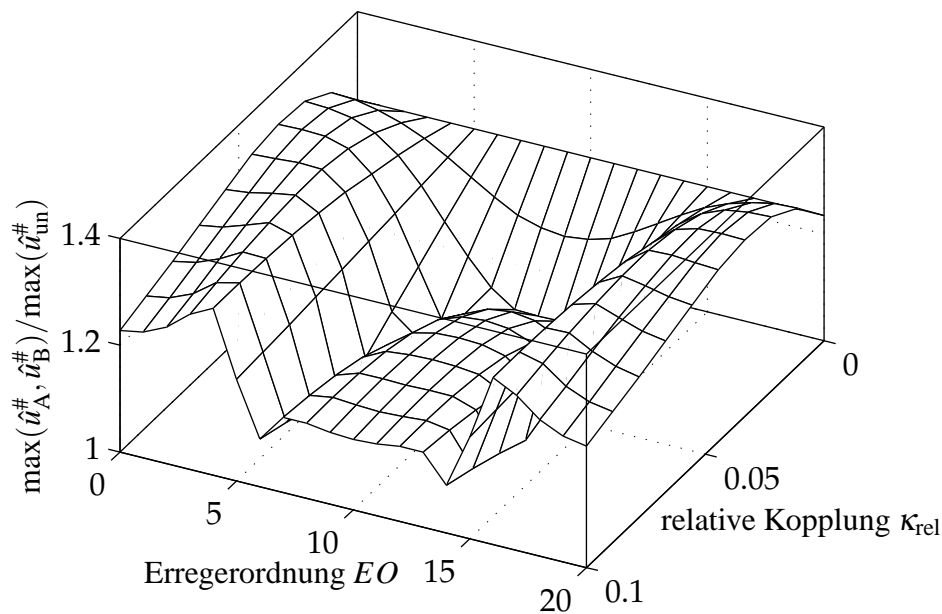
Durch die Berücksichtigung einer Kopplung der Schwinger mit  $\kappa_{rel} = 0.1$  verändert sich das dynamische Verhalten des Systems erheblich. In **Bild 5.21** sind die Amplituden- und Phasengänge für diesen Fall mit den Resonanzen der gekoppelten Schwingungsformen dargestellt. Die erste Schwingungsform mit  $\Delta\tilde{\varphi} = 18^\circ$  und die zweite Schwingungsform mit  $\Delta\tilde{\varphi} = 18^\circ - 180^\circ = -162^\circ$  zwischen A- und B-Schwinger sind in den Phasengängen deutlich erkennbar. Mit der Verstimmung vergrößert sich der Frequenzunterschied der beiden Eigenformen des Systems. Die Schwingungsantwort des B-Schwingers ist zwar geringer, als im unverstimmten System, jedoch wächst die Amplitudenüberhöhung des A-Schwingers.



**Bild 5.22:** Frequenzantworten des Systems mit  $\kappa_{rel} = 0.1$  und Erregerordnung  $EO = 9$ ; a) und b) Amplituden- und Phasengang bei  $\kappa_{ver} = 0.1$ ; c) und d) Amplituden- und Phasengang bei  $\kappa_{ver} = 0.2$ ; e) und f) Amplituden- und Phasengang bei  $\kappa_{ver} = 0.3$

Für die Anregung des Systems mit  $EO = 9$  wird die zweite Teillösung in Gl. (5.81) benötigt, weil das System primär in der zweiten Eigenform angeregt wird. Mit der Verstimmung wird die erste Schwingungsform mit geringerer Steifigkeit und damit geringerer Eigenfrequenz ebenfalls anregbar. Die Phasengänge in **Bild 5.22** zeigen den Phasenversatz zwischen A- und B-Schwinger bei  $\Omega_{Er} = 0$  Hz mit  $\Delta\varphi = 2\pi 9/20 = 162^\circ$ . Aufgrund der erhöhten Eigenfrequenz  $\omega_2 > \omega_{unverstimmt}$  reduzieren sich die Amplituden der primären Schwingungsantwort bei zunehmendem  $\kappa_{ver}$ . Die erste Eigenform erlangt mit der Verstimmung stärkeren Einfluss und die zugehörigen Amplituden überschreiten bei ausreichend hoher Verstimmung die Resonanzamplitude des unverstimmten Systems.

Unabhängig von der Erregerordnung und der relativen Kopplung überschreitet im verstimten Fall immer mindestens eine der beiden Amplituden die Antwort des unver-



**Bild 5.23:** Maximale Amplitudenüberhöhung bei Verstimmung mit  $\kappa_{ver} = 0.1$  gegenüber der unverstimmten Systemantwort in Abhängigkeit der Erregerordnung und der relativen Kopplung

stimmten Systems. In **Bild 5.23** sind die maximalen Amplitudenüberhöhungen für eine Verstimmung mit  $\kappa_{ver} = 0.1$  für alle Erregerordnungen im Bereich  $0 \leq EO/N \leq 1$  aufgetragen. Es zeigt sich, dass die geringsten Werte der Amplitudenüberhöhung im Bereich  $1/4 \leq EO/N \leq 3/4$  vorliegen, in dem primär die zweite Eigenform angeregt wird. Alle anderen Erregerordnungen führen bei gleicher Verstimmung zu deutlich höheren Schwingungsantworten gegenüber dem unverstimmten System. Darüber hinaus ist die Symmetrie des Systems in **Bild 5.23** deutlich zu erkennen.

Die in diesem Abschnitt durchgeführten Untersuchungen zeigen, dass mit der gewählten konstanten modalen Dämpfung der Eigenformen die Schwingungsantworten des verstimmtten Systems immer höhere Amplituden aufweisen, als das unverstimmte System. Damit liefert das Minimalmodell eine eindeutige Basis für die folgenden Schwingungsanalysen mit Reibungskopplung. Schwingungsamplituden unterhalb der unverstimmten Referenzantwort können auf Effekte der Reibungsdämpfung zurückgeführt werden und sind nicht durch die Dynamik des alternierend verstimmtten linearen Systems begründet.



## 6 Unverstimmte Schaufelkränze mit Reibungskopplung

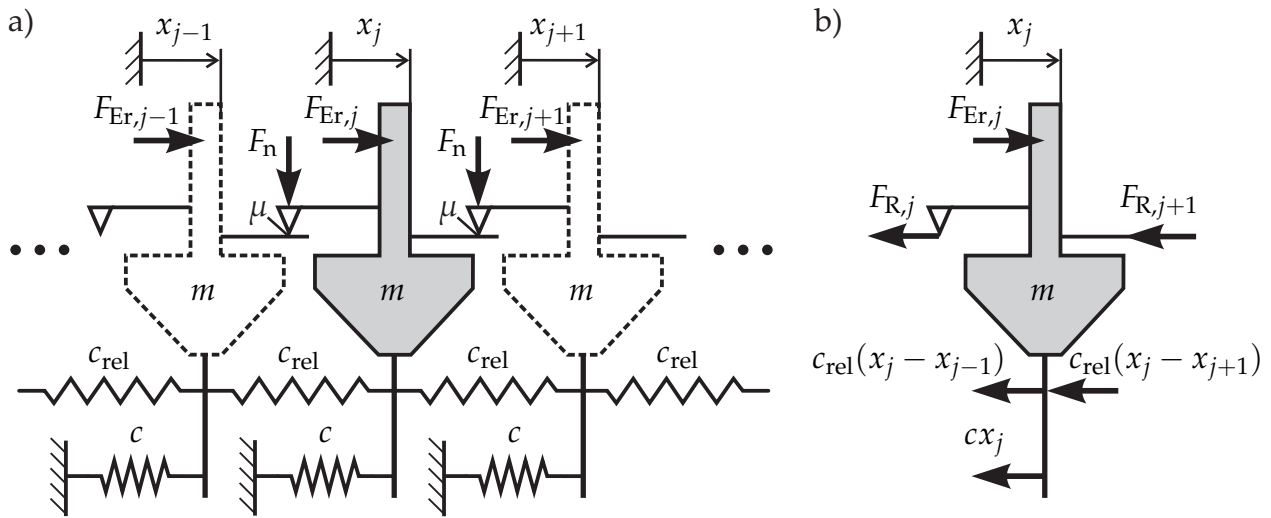
In den vorangegangenen Abschnitten wurde das lineare Systemverhalten des Minimalmodells mit alternierender Verstimmung untersucht. Das folgende Kapitel befasst sich mit der nichtlinearen Kopplung zwischen benachbarten Schwingern des unverstimmten Modells. Die in der Praxis eingesetzten Kopplungsmethoden über Deckbänder oder Reibelemente beeinflussen das dynamische Systemverhalten. Reibkontakte werden gezielt eingesetzt, um die Systemdämpfung zu erhöhen oder Resonanzfrequenzen zu verschieben. Diese Effekte müssen durch eine geeignete Kontaktmodellierung berücksichtigt werden. Wie bereits bei der Wahl des Strukturmodells wird auch bei der Beschreibung des Kontakts ein möglichst einfaches Modell mit einer überschaubaren Anzahl von Parametern gewählt. Ein auf Kontaktsteifigkeiten basierendes Modell mit Haft-, Gleit- und Separationsphasen bildet alle relevanten Eigenschaften des Kontaktvorgangs ab und wird verbreitet für numerische Kontaktuntersuchungen, insbesondere bei Starr- und Mehrkörpersystemen, eingesetzt. In Abschnitt 6.1 wird die Reibungskopplung bei zyklischen Strukturen mit auf dem COULOMB-schen Reibgesetz basierenden Reibkräften betrachtet. Die Reibleistung wird nach Anwendung der HBM in Abhängigkeit der Schwingungsform bestimmt. Darüber hinaus wird auf die komplexe Differenzierbarkeit der mit der HBM ermittelten Näherungsgleichung für reibungsgedämpfte Systeme eingegangen. In Abschnitt 6.2 wird anschließend das in Kapitel 7 verwendete Elasto-Gleit-Kontaktmodell und die amplitudenabhängige Reibleistung beschrieben.

### 6.1 Schwingerkette mit COULOMB-scher Reibung

Die einfachste Berücksichtigung einer Reibungskopplung in dem Minimalmodell aus Kapitel 5 sind in Bewegungsrichtung eines Schwingers wirkende Tangentialkräfte. **Bild 6.1** zeigt die Anordnung der relativen Kopplung im unverstimmten System. Der Kontakt zwischen benachbarten Schwingern ist identisch und die zyklische Symmetrie bleibt erhalten. Die Bewegungsgleichung für ein Segment mit Tangentialkontakt ergibt sich zu

$$m\ddot{x}_j + cx_j + c_{\text{rel}}(x_j - x_{j+1}) + c_{\text{rel}}(x_j - x_{j-1}) = F_{\text{Er},j} - F_{\text{R},j} - F_{\text{R},j+1}, \quad (6.1)$$

mit einer erregerordnungs-basierten Anregung. Die von der Relativgeschwindigkeit abhängigen Reibkräfte  $F_{\text{R},j}$  und  $F_{\text{R},j+1}$  werden mit einer konstanten Normalkraft  $F_{\text{N}}$  und dem Reibbeiwert  $\mu$  beschrieben und wirken der Relativbewegung entgegen. Mit der



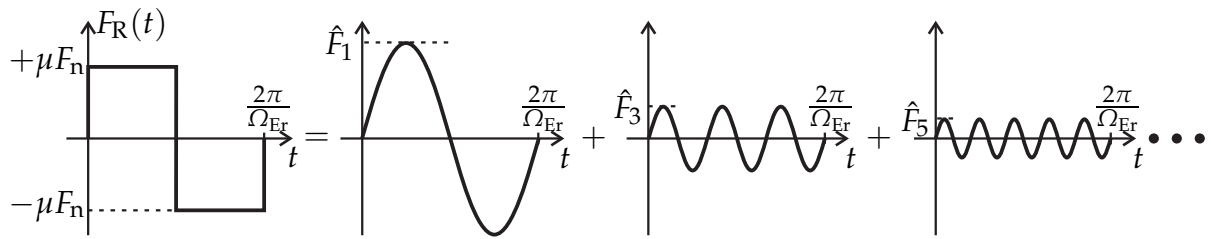
**Bild 6.1:** Minimalmodell des ungestimmten Schaufelkranzes mit nichtlinearer Kopplung durch COULOMB'schen Reibkontakt zwischen benachbarten Schwingern; a) zyklisches Segment; b) Freikörperbild eines zyklischen Segments

Signumfunktion folgt

$$F_{R,j} = \mu F_N \operatorname{sgn} \{ \dot{x}_j - \dot{x}_{j-1} \} = \mu F_N \operatorname{sgn} \{ \Delta \dot{x}_j \} , \quad (6.2)$$

$$F_{R,j+1} = \mu F_N \operatorname{sgn} \{ \dot{x}_j - \dot{x}_{j+1} \} = \mu F_N \operatorname{sgn} \{ \Delta \dot{x}_{j+1} \} , \quad (6.3)$$

wobei  $\Delta \dot{x}_j$  und  $\Delta \dot{x}_{j+1}$  die Relativgeschwindigkeiten für den linken und rechten Kontakt am  $j$ -ten Schwinger bezeichnen. Das lineare System ohne Reibung kann mit einem harmonischen Ansatz exakt gelöst werden. Die nichtlineare Bewegungsgleichung Gl. (6.1) lässt sich mit einer einfach harmonischen Funktion nicht lösen. Das sich einstellende prinzipielle Systemverhalten kann mit einem Gedankenexperiment ausgehend vom reibungsfreien Zustand veranschaulicht werden. Ohne Reibung stellt sich eine harmonische Schwingung mit der Erregerfrequenz ein. Auch die Relativgeschwindigkeit zwischen zwei Schwingern ist eine harmonische Schwingung mit der Erregerfrequenz. Wird der Reibwert nun quasistatisch in seinem Wert angehoben wirken die Reibkräfte aufgrund der Signumfunktion in Form einer Rechteckschwingung entgegen der harmonischen Bewegung des Systems. Um die Lösung der Bewegungsgleichung in diesem Fall zu erhalten kann das Rechtecksignal in eine FOURIER-Reihe der harmonischen Komponenten zerlegt werden. Die ersten drei von Null verschiedenen Komponenten sind in **Bild 6.2** dargestellt. Die Gesamtlösung folgt aus der Überlagerung der Teillösungen für jede harmonische Komponente. Die so erhaltene Zwischenlösung kann nun als Ausgangspunkt verwendet werden, um eine weitere Erhöhung des Reibwerts durchzuführen. Jede im Schritt zuvor gefundene Teilschwingung erzeugt ein Rechtecksignal im Kraftverlauf, welches wiederum in seine Komponenten zerlegt werden kann. Der Gedanke kann fortgeführt werden bis der Zielwert  $\mu$  erreicht ist. Es wird klar, dass die Lösung für das nichtlineare System eine periodische Funktion mit der Grundfrequenz der Anregung ist und aus unendlich vielen höherharmonischen Anteilen besteht, welche mit der Frequenz abnehmende Amplituden aufweisen. Häufig wird nur die grundharmonische Schwingung als



**Bild 6.2:** Harmonische Komponenten eines rechteckförmigen Reibkraftverlaufs

Näherungslösung verwendet, wie es beispielsweise bei der HBM der Fall ist. Das im Folgenden vorgestellte graphische Vorgehen zur näherungsweise Lösung des vorliegenden nichtlinearen Problems entspricht der HBM.

Als Ansatz für die Lösung des nichtlinearen Problems wird eine harmonische Näherungslösung  $x_j^*$  vorgegeben

$$x_j \approx x_j^* = \Re \{ \underline{x}_j^* \} = \Re \{ \hat{x}_j^* e^{i\Omega_{Er}t} \} ; \hat{x}_{j\pm 1}^* = \hat{x}_j^* e^{\pm i\Delta\varphi} . \quad (6.4)$$

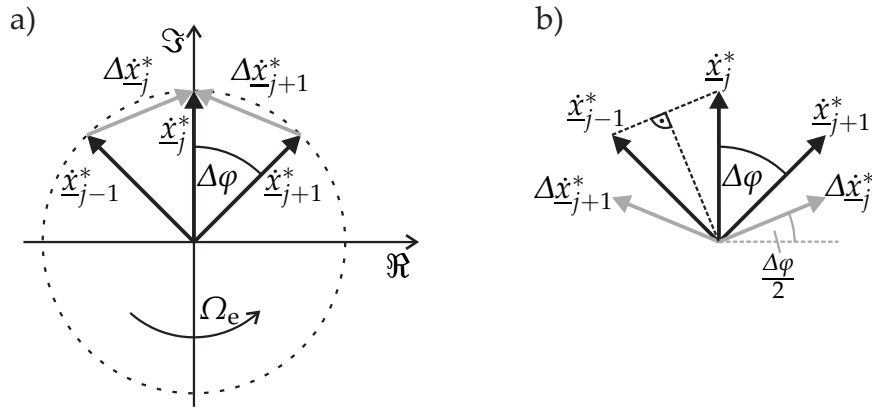
Das System schwingt mit der Erregerfrequenz  $\Omega_{Er}$  und benachbarte Segmente weisen den durch die Erregerordnung vorgegebenen Phasenversatz  $\Delta\varphi$  auf, vgl. Abschnitt 5.5.1. Mit einem Unterstrich gekennzeichnete Größen sind, wie in den vorangegangenen Abschnitten, komplex erweiterte Größen für eine anschauliche Betrachtung der Phasenbeziehungen in der komplexen Ebene. Die Länge des Zeigers beschreibt die Amplitude der Schwingung und wird mit  $|\underline{x}_j^*| = \hat{x}_j^*$  bezeichnet. Die Geschwindigkeit folgt entsprechend zu

$$\underline{\dot{x}}_j^* = i\Omega_{Er}\hat{x}_j^* e^{i\Omega_{Er}t} \quad (6.5)$$

und hat die Länge  $\Omega_{Er}\hat{x}_j^*$ . Mit den komplexen Bezeichnungen in Gl. (6.4) wird die Bewegungsgleichung für das Segment überführt in

$$\underline{\ddot{x}}_j^* + \omega^2 \underline{x}_j^* = \frac{1}{m} \left( \underline{F}_{Er,j} - \underline{F}_{R,j}^* - \underline{F}_{R,j+1}^* \right) , \quad (6.6)$$

mit den durch ihre grundharmonischen Komponenten angenäherten Reibkräften. Die Eigenkreisfrequenz  $\omega$  ist durch Gl. (5.8) in Abschnitt 5.1 gegeben. Für die Bestimmung der Reibkräfte werden die Relativgeschwindigkeiten  $\Delta\dot{x}_j^*$  und  $\Delta\dot{x}_{j+1}^*$  benötigt, welche in der komplexen Ebene graphisch ermittelt werden können. In **Bild 6.3 a)** sind die Geschwindigkeiten des Näherungsansatzes und die Relativgeschwindigkeiten als komplexe Zeiger dargestellt. Nach **Bild 6.3 b)** können die Relativgeschwindigkeiten durch den Zeiger der Absolutgeschwindigkeit  $\underline{\dot{x}}_j^*$  mit entsprechendem Phasenversatz ausgedrückt werden. Die Amplitude für das Rechtecksignal aus **Bild 6.2** beträgt  $\hat{F}_1 = 4\mu F_n/\pi$  und wird jeweils mit dem passenden normierten Zeiger verknüpft. Mit den aus **Bild 6.3** abgelesenen Phasen-



**Bild 6.3:** Darstellung der Relativgeschwindigkeiten zwischen benachbarten Segmenten des Minimalmodells; a) Absolut- und Relativgeschwindigkeiten in der komplexen Ebene; b) Phasenversatzwinkel zwischen Absolut- und Relativgeschwindigkeiten vektorieil betrachtet

versatzwinkeln folgen die Zeiger der harmonischen Kraftverläufe zu

$$\underline{F}_{R,j}^* = \frac{4}{\pi} \mu F_n \frac{\dot{x}_j^*}{\Omega_{Er} \hat{x}_j^*} e^{+i\frac{1}{2}(\Delta\varphi - \pi)}, \quad (6.7)$$

$$\underline{F}_{R,j+1}^* = \frac{4}{\pi} \mu F_n \frac{\dot{x}_j^*}{\Omega_{Er} \hat{x}_j^*} e^{-i\frac{1}{2}(\Delta\varphi - \pi)}. \quad (6.8)$$

Die Reibkräfte aus Gl. (6.7) und Gl. (6.8) werden in der Bewegungsgleichung Gl. (6.6) überlagert, sodass deren Summe vorab berechnet werden kann. Die überlagerte Reibkraft lautet

$$\underline{F}_{R,j}^* + \underline{F}_{R,j+1}^* = \frac{4}{\pi} \mu F_n 2 \cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \frac{\dot{x}_j^*}{\Omega_{Er} \hat{x}_j^*} \quad (6.9)$$

und zeigt in Richtung der Geschwindigkeit  $\dot{x}_j^*$ , vgl. **Bild 6.3 b**). Die Bewegungsgleichung des Systems folgt zu

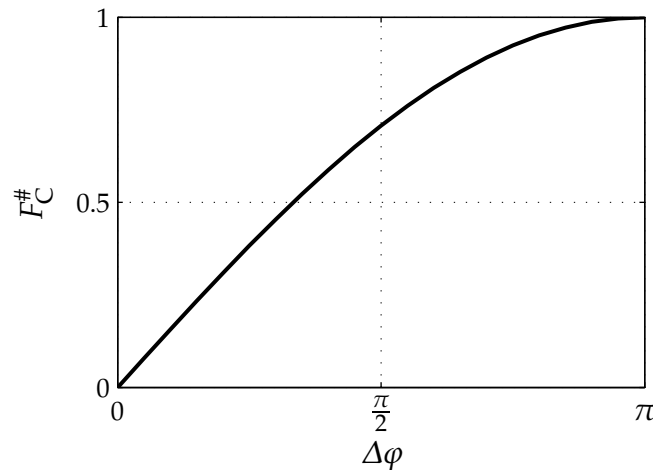
$$\ddot{x}_j^* + \frac{8}{\pi} \frac{\mu F_n}{m \Omega_{Er} \hat{x}_j^*} \sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \dot{x}_j^* + \omega^2 x_j^* = \frac{F_{Er,j}^*}{m} \quad (6.10)$$

und ist das Ergebnis der äquivalenten Linearisierung mit einem Dämpfungskoeffizienten, der sich umgekehrt proportional zur Schwingungsamplitude verhält. Nach Einsetzen des harmonischen Ansatzes  $x_j^* = \hat{x}_j^* e^{i\Omega_{Er}t}$  und der harmonischen Anregung  $F_{Er,j}^* = \hat{F}_{Er,j}^* e^{i\Omega_{Er}t}$  in Gl. (6.10) folgt das algebraische Gleichungssystem

$$\left(\omega^2 - \Omega_{Er}^2 + i \frac{F_C}{m \hat{x}_j^*}\right) \hat{x}_j^* = \frac{\hat{F}_{Er,j}^*}{m}, \quad (6.11)$$

$$\text{mit } F_C = \frac{8}{\pi} \mu F_n \sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right). \quad (6.12)$$

Die äquivalente Reibungsdämpfungskraft  $F_C$  ist von der angeregten Schwingungsform



**Bild 6.4:** Darstellung des normierten Verlaufs  $F_C^\#$  über dem Phasenversatz  $\Delta\varphi$

abhängig und ist in der normierten Darstellung

$$F_C^\# = F_C \frac{\pi}{8\mu F_n} \quad (6.13)$$

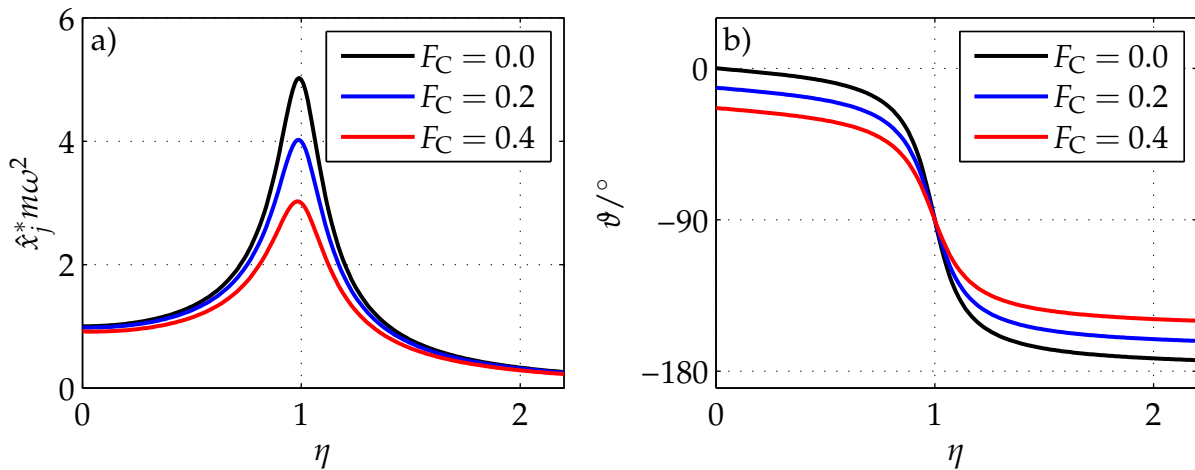
in **Bild 6.4** gezeigt. Für den Fall  $\Delta\varphi = 0$  schwingen alle Segmente des Modells in Phase und es liegt keine Relativbewegung vor. Die Reibkraft ist folglich  $F_C^\# = 0$ . Bei gegenphasiger Bewegung ergibt sich mit  $\Delta\varphi = \pi$  der Maximalwert der Reibungsdämpfung.

Wird das System um eine lineare modale Dämpfung erweitert, ergibt sich

$$\left( \omega^2 - \Omega_{\text{Er}}^2 + i2D\omega\Omega_{\text{Er}} + i\frac{F_C}{m\hat{x}_j^*} \right) \hat{x}_j^* = \frac{\hat{F}_{\text{Er},j}^*}{m}. \quad (6.14)$$

Mit Gl. (6.11) und Gl. (6.14) liegen komplexe nichtlineare Gleichungen zur Bestimmung der Schwingungsantwort vor, die sich in Nullstellensuchen umformen lassen, für die das numerisch effiziente NEWTON-Verfahren als Standardverfahren gilt, vgl. [82, S. 107]. Das NEWTON-Verfahren setzt die Differenzierbarkeit der gegebenen Funktion voraus, die im Falle komplexer Variablen in die Forderung nach komplexer Differenzierbarkeit übergeht. Ist eine Funktion nicht nur in einem Punkt der komplexen Ebene, sondern in jedem Punkt einer offenen Umgebung  $U$  komplex differenzierbar, so ist die Funktion *holomorph*, vgl. [37, S. 1]. Eine Funktion ist komplex differenzierbar, wenn ihr Real- und Imaginärteil jeweils reell differenzierbar ist und die CAUCHY-RIEMANN Differentialgleichungen erfüllt, vgl. [37, S. 5]. In Kapitel C des Anhangs wird nachgewiesen, dass Gl. (6.14) die CAUCHY-RIEMANN Differentialgleichungen nicht erfüllt und damit nicht holomorph ist. Für eine numerische Nullstellensuche muss das vorliegende Problem daher in ein Gleichungssystem mit jeweils einer Zeile für den Realteil und einer Zeile für den Imaginärteil der Lösung umgeformt werden. Das NEWTON-Verfahren kann also nicht direkt auf die komplexe Gleichung angewendet werden.

Neben iterativen Verfahren zur allgemeinen Lösungsfindung einer Fixpunktaufgabe, bzw. Nullstellensuche kann das hier vorliegende Problem explizit gelöst werden. Gl. (6.14) führt nach Umformung auf eine quadratische Gleichung zur Bestimmung der



**Bild 6.5:** Schwingungsantworten des unverstimmten Minimalmodells mit COULOMB-scher Reibungskopplung bei Variation von  $F_C$ ; a) Amplitudengänge; b) Phasengänge

Amplitude. Mit dem Frequenzverhältnis  $\eta = \Omega_{Er}/\omega$  folgt die Lösung mit Betrag  $\hat{x}_j^*$  und Phasenwinkel  $\vartheta$  zu

$$\hat{x}_j^* = \frac{\sqrt{\hat{F}_{Er,j}^{*2} ((1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2) - F_C^2 (1 - \eta^2)^2 - 2D\eta F_C}}{m\omega^2 ((1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2)}, \quad (6.15)$$

sowie

$$\tan \vartheta = -\frac{2D\eta}{1 - \eta^2} - \frac{F_C}{m\omega^2 \hat{x}_j^* (1 - \eta^2)}. \quad (6.16)$$

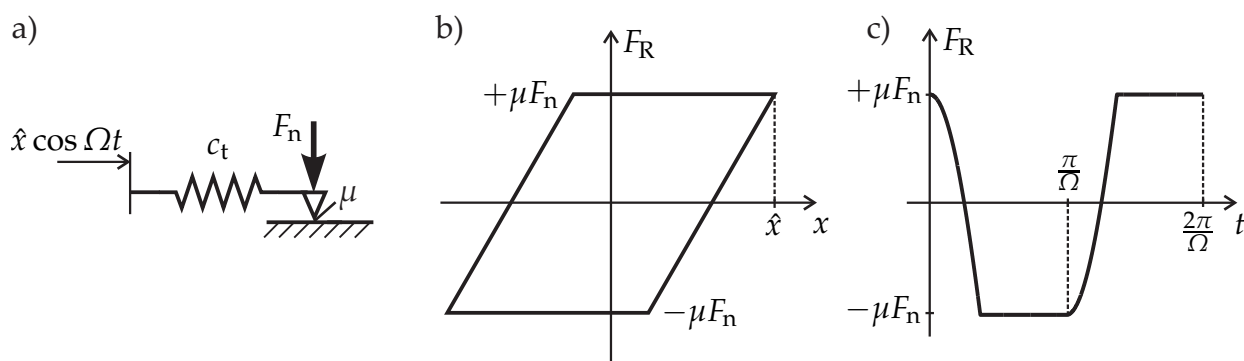
Die Schritte zur analytischen Bestimmung der Schwingungsantwort sind ausführlich in Kapitel D im Anhang beschrieben. **Bild 6.5** zeigt die Verläufe der mit dem Faktor  $m\omega^2$  normierten Amplitude und der Phase für verschiedene Werte von  $F_C$ . Die Erregerkraftamplitude ist auf  $\hat{F}_{Er,j}^* = 1$  gesetzt. Es zeigt sich, dass mit zunehmender Höhe der Reibkräfte eine Amplitudenreduktion und ein flacherer Verlauf des Phasengangs im Bereich der Resonanz ( $\eta = 1$ ) einhergeht. In Resonanz schneiden sich alle Verläufe der Phase bei  $\vartheta = -90^\circ$ . Für  $\eta = 0$  und  $\eta \rightarrow \infty$  sind die Werte des Phasenwinkels um einen von der Reibung abhängigen Betrag gegenüber des reibungsfreien Verlaufs versetzt. Der explizite Ausdruck für die Resonanzamplitude  $\hat{x}_{j,res}^*$  folgt für  $\eta = 1$  zu

$$\hat{x}_{j,res}^* = \frac{\hat{F}_{Er,j}^* - F_C}{2D\omega^2 m} \quad (6.17)$$

und zeigt, dass ohne die modale Dämpfung  $D$  unendlich hohe Systemantworten auftreten können. Aus Gl. (6.17) kann die Bedingung

$$\hat{F}_{Er,j}^* > F_C \quad (6.18)$$

abgeleitet werden, für die  $\hat{x}_{j,res}^* > 0$  gilt. Geringere Werte der Erregerkraftamplitude reichen demnach nicht aus, um die Haftreibung im System zu überwinden und die für die Lösung vorausgesetzte Schwingungsform mit Phasenversatz  $\Delta\varphi$  anzuregen.



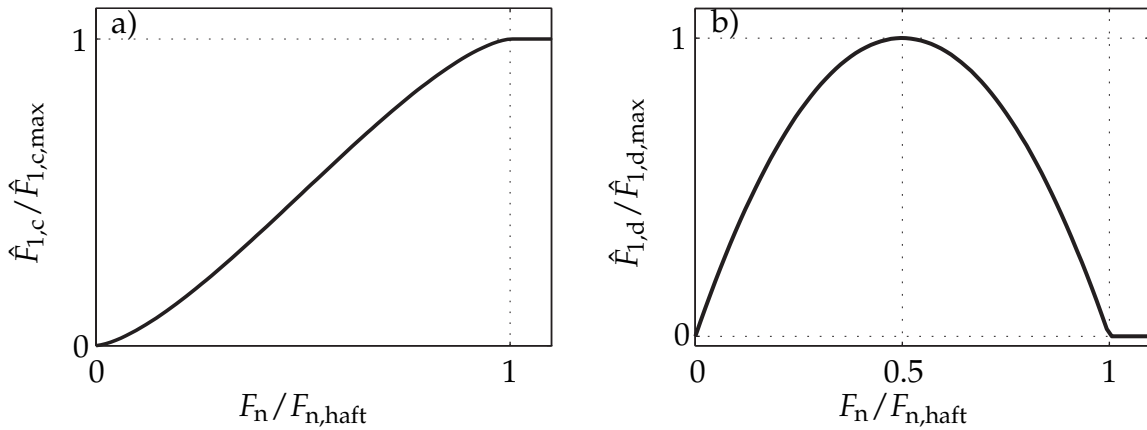
**Bild 6.6:** Elasto-Gleit-Kontaktmodell und Reibkraftverlauf mit Haft- und Gleitbereichen bei harmonischer Eingangsbewegung; a) Elasto-Gleit-Kontaktmodell; b) Reibhysterese; c) Reibkraftzeitverlauf

## 6.2 Erweiterung auf das Elasto-Gleit-Kontaktmodell

Der COULOMB-sche Reibkontakt ergänzt um eine lineare Nachgiebigkeit ist als Elasto-Gleit-Modell bekannt und wird in zahlreichen Strukturmodellen zur Kontaktmodellierung verwendet, vgl. Abschnitt 2.3.1. Das Elasto-Gleit-Modell ist mit der tangentialen Kontaktsteifigkeit  $c_t$ , dem Reibwert  $\mu$  sowie der Normalkraft  $F_n$  und der harmonischen Relativbewegung  $\hat{x} \cos \Omega t$  in **Bild 6.6 a)** dargestellt.

Bei einer harmonischen Relativbewegung mit gegebener Amplitude  $\hat{x}$  als Eingangssignal und einer konstanten Normalkraft stellt sich ein von der Höhe der Normalkraft  $F_n$  abhängiger Verlauf der Reibkraft  $F_R$  ein. **Bild 6.6 c)** zeigt einen typischen Verlauf von  $F_R$  über der Zeit mit Haft und Gleitphasen und die dazu passende Hysterese ist in **Bild 6.6 b)** dargestellt. Die Reibkraft kann sowohl Steifigkeits-, als auch Dämpfungseigenschaften aufweisen und lässt sich durch ein lineares parallel geschaltetes Feder-Dämpfer-Paar mit von der Amplitude  $\hat{x}$  abhängigen Parametern annähern. Für die Beschreibung werden aus dem Zeitverlauf von  $F_R$  die Fourierkoeffizienten des grundharmonischen Anteils bestimmt und nach Steifigkeitskoeffizient  $\hat{F}_c$  und Dämpfungskoeffizient  $\hat{F}_d$  unterschieden. In den an dieses Kapitel anschließenden numerischen Untersuchungen werden die Koeffizienten mit Hilfe der diskreten Fourier Transformation aus den über eine Periode abgetasteten Kontaktkraftverläufen ermittelt. In **Bild 6.7** sind die Verläufe der Koeffizienten für den Elasto-Gleit-Kontakt in Abhängigkeit der Normalkraft für einen konstant gehaltenen Wert der Amplitude  $\hat{x}$  dargestellt. Ab dem Wert  $F_n = F_{n,\text{haft}}$  findet kein Gleiten im Kontakt mehr statt und das Kontaktmodell wirkt wie eine lineare Feder. Bis zu diesem Wert der Kontaktnormalkraft nimmt der Steifigkeitsanteil stetig zu und der dissipative Anteil durchläuft sein Maximum bei  $F_n = F_{n,\text{haft}}/2$ .

Die Berechnung der harmonischen Koeffizienten der Reibkraft des Elasto-Gleit-Kontaktmodells kann auch analytisch durchgeführt werden, vgl. SINHA & GRIFFIN [89]. Für einen Vergleich mit dem COULOMB-schen Reibkontakt ohne Steifigkeit wird nachfolgend die analytische Lösung für den Dämpfungskoeffizienten vorgestellt. Für den dissipativen Anteil ist es ausreichend nur die Bereiche des Gleitens zu betrachten und es



**Bild 6.7:** Verläufe der Fourierkoeffizienten des grundharmonischen Anteils der Reibkraft des Elasto-Gleit-Modells in Abhängigkeit der Kontaktnormalkraft; a) Steifigkeitskoeffizient; b) Dämpfungskoeffizient

folgt

$$\hat{F}_d = 2 \frac{1}{\pi} \int_{\gamma}^{\pi} \mu F_n \sin \tau \, d\tau ; \quad \tau = \Omega t \quad (6.19)$$

$$\hat{F}_d = \frac{2\mu F_n}{\pi} [-\cos \tau]_{\gamma}^{\pi} = \frac{2\mu F_n}{\pi} (1 + \cos \gamma) , \quad (6.20)$$

wobei der Übergang zwischen Haften und Gleiten bei Erreichen des Winkels

$$\gamma = \Omega t_{\gamma} = \arccos \left( 1 - \frac{2\mu F_n}{c_t \hat{x}} \right) \quad (6.21)$$

stattfindet. Einsetzen von Gl. (6.21) in Gl. (6.20) führt auf

$$\hat{F}_d = \frac{4\mu F_n}{\pi} \left( 1 - \frac{\mu F_n}{c_t \hat{x}} \right) . \quad (6.22)$$

In Gl. (6.22) lässt sich die Parabelform bezüglich einer Veränderung der Kontaktnormalkraft aus **Bild 6.7 b)** erkennen und zusätzlich die Haftgrenze von  $F_{n,haft} = c_t \hat{x} / \mu$  ablesen, ab der keine Energie mehr dissipiert werden kann, und die von der Amplitude  $\hat{x}$  abhängig ist. Die Dämpfungswirkung der Reibkraft für den Elasto-Gleit-Kontakt ist mit der Dissipation des Kontakts ohne Nachgiebigkeit direkt vergleichbar. Für eine Steifigkeit  $c_t \rightarrow \infty$  folgt aus Gl. (6.22) die Kraftamplitude  $\hat{F}_1 = 4\mu F_n / \pi$  des im vorhergehenden Abschnitt gezeigten COULOMB-Kontakts. Durch eine endliche Steifigkeit ist das Dämpfungspotential reduziert. In dem folgenden Kapitel dieser Arbeit wird das dynamische Verhalten alternierend verstimmtter Systeme mit Reibungskopplung behandelt. Ausgangspunkt ist der tangentielle Kontakt mit dem hier beschriebenen Elasto-Gleit-Kontaktmodell.



## 7 Alternierend verstimmte Schaufelkränze mit Reibungskopplung

In den vorangegangenen Abschnitten sind alternierende Verstimmung und nichtlineare Reibungskopplung getrennt voneinander betrachtet worden. Das folgende Kapitel beinhaltet die dynamische Analyse bewusst alternierend verstimmter und durch Reibung gekoppelter zyklischer Strukturen. In Abschnitt 7.2 wird das alternierend verstimmte Minimalmodell mit dem Elasto-Gleit-Kontakt aus Abschnitt 6.2 behandelt. Die Entwicklung und Lösung der Systemgleichung wird ausführlich beschrieben und Ergebnisse auf Basis der Erkenntnisse der vorherigen Untersuchungen analysiert. Anschließend wird in Abschnitt 7.3 das Minimalmodell mit Reibelementen als separate Starrkörper untersucht. Neben der Schwingungsantwort der verstimmten Schaufeln wird auch die Bewegung der Reibkörper beschrieben. Es wird gezeigt, wie sich eine alternierende Verstimmung auf die optimale Auslegung der Reibelemente hinsichtlich ihrer Dämpfungsleistung auswirkt. Vorab wird allgemein die Anwendung der Harmonischen Balance Methode bei Systemen mit lokalen Kontaktnichtlinearitäten beschrieben.

### 7.1 Methode der Harmonischen Balance bei nichtlinearen Systemen

Beschaukelungen mit Reibkontakt stellen schwingungsfähige Systeme mit lokalen Nichtlinearitäten dar, welche durch eine Differentialgleichung der Form

$$M\ddot{\mathbf{u}} + D\dot{\mathbf{u}} + K\mathbf{u} = \mathbf{F}_{\text{Er}} - \mathbf{F}_{\text{nl}}(\mathbf{u}) \quad (7.1)$$

beschrieben werden können. Der Schaufelkranz wird als linear-elastische Struktur mit Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrix  $M$ ,  $D$  und  $K$  modelliert. Nichtlineare Kräfte aus der Kontaktbeschreibung sind in dem Vektor  $\mathbf{F}_{\text{nl}}(\mathbf{u})$  enthalten und von der Verschiebung  $\mathbf{u}$  abhängig. Der Vektor  $\mathbf{F}_{\text{Er}}$  beschreibt äußere Anregungskräfte. Die Form von Gl. (7.1) gilt sowohl für die in dieser Arbeit verwendeten Mehrmassenmodelle, als auch für eine Beschreibung der Schaufeln durch die Finite Elemente Methode mit linear-elastischem Materialgesetz. Eine harmonische Anregung führt, wie bei dem Minimalmodell mit COULOMB-schen Reibkontakt in Abschnitt 6.1, auf eine periodische Schwingungsantwort. Die Grundidee der Harmonischen Balance Methode ist die Näherung der periodischen Lösung durch eine Fourierreihe. Der Verschiebungsvektor  $\mathbf{u}$  kann dabei

durch den Näherungsansatz

$$\mathbf{u}(t) \approx \Re \left\{ \sum_{k=0}^{k_h} \hat{\mathbf{u}}_k e^{ik\Omega t} \right\}, \quad (7.2)$$

mit einer auf  $k_h$  begrenzten Anzahl harmonischer Komponenten beschrieben werden. Gl. (7.2) enthält neben den harmonischen Komponenten des periodischen Signals mit  $k = 0$  einen Anteil für eine mögliche statische Verschiebung. Da reibungsgedämpfte Systeme mit der HBM auf Näherungsgleichungen führen, die nicht komplex differenzierbar sind, vgl. Abschnitt 6.1, ist eine reelle Darstellung des harmonischen Näherungsansatzes für die Lösung mit dem gängigen NEWTON-Verfahren notwendig. Die reelle Darstellung muss dabei konsistent zu der Definition der komplex erweiterten Zeigerdarstellung innerhalb der vorliegenden Arbeit sein. Der Näherungsansatz in reeller Darstellung folgt zu

$$\mathbf{u}(t) \approx \mathbf{u}^*(t) = \hat{\mathbf{u}}_0 + \sum_{k=1}^{k_h} (\hat{\mathbf{u}}_k^c \cos k\Omega_{Er}t - \hat{\mathbf{u}}_k^s \sin k\Omega_{Er}t), \quad (7.3)$$

mit den Indizes c und s zur Bezeichnung des Kosinus- bzw. Sinusanteils der jeweiligen harmonischen Komponente. Das negative Vorzeichen vor den Sinusfunktionen leitet sich aus der komplexen Beschreibung in Gl. (7.2) ab. Der Zusammenhang wird anhand der grundharmonischen Komponente mit  $k = 1$  verdeutlicht. Der zugehörige Zeitverlauf  $\mathbf{u}_1$  lautet

$$\mathbf{u}_1(t) = \Re \left\{ \hat{\mathbf{u}}_1 e^{i\Omega_{Er}t} \right\}. \quad (7.4)$$

Mit der EULER-schen Identität  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$  und der Darstellung der komplexen Amplitude  $\hat{\mathbf{u}}_1$  durch ihren Realteil  $\hat{\mathbf{u}}_1^{\Re}$  und Imaginärteil  $\hat{\mathbf{u}}_1^{\Im}$  folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1(t) &= \Re \left\{ (\hat{\mathbf{u}}_1^{\Re} + i\hat{\mathbf{u}}_1^{\Im})(\cos \Omega_{Er}t + i \sin \Omega_{Er}t) \right\} \\ &= \Re \left\{ (\hat{\mathbf{u}}_1^{\Re} \cos \Omega_{Er}t - \hat{\mathbf{u}}_1^{\Im} \sin \Omega_{Er}t) + i(\hat{\mathbf{u}}_1^{\Re} \sin \Omega_{Er}t + \hat{\mathbf{u}}_1^{\Im} \cos \Omega_{Er}t) \right\} \\ &= \hat{\mathbf{u}}_1^{\Re} \cos \Omega_{Er}t - \hat{\mathbf{u}}_1^{\Im} \sin \Omega_{Er}t. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Für die Koeffizienten der komplexen und der reellen Darstellung gilt damit  $\hat{\mathbf{u}}_k^c = \hat{\mathbf{u}}_k^{\Re}$  und  $\hat{\mathbf{u}}_k^s = \hat{\mathbf{u}}_k^{\Im}$ . Das alternierende Vorzeichen in Gl. (7.3) ist konsistent zu dem mathematisch positiven Drehsinn in Gl. (7.2).

Die harmonischen Komponenten erfüllen die durch die Anregung mit  $\Omega_{Er} = 2\pi/T$  hervorgerufene Periodizität  $T$ . Die von den Verschiebungen abhängigen nichtlinearen Kräfte  $\mathbf{F}_{nl}(\mathbf{u})$  werden mit Gl. (7.3) entsprechend in Form ihrer harmonischen Komponenten beschrieben und ergeben sich zu

$$\mathbf{F}_{nl}(\mathbf{u}(t)) \approx \mathbf{F}_{nl}^*(\mathbf{u}^*(t)) = \hat{\mathbf{F}}_{nl,0} + \sum_{k=1}^{k_h} \left( \hat{\mathbf{F}}_{nl,k}^c \cos k\Omega_{Er}t - \hat{\mathbf{F}}_{nl,k}^s \sin k\Omega_{Er}t \right). \quad (7.6)$$

Mit Gl. (7.3) und Gl. (7.6) kann die Bewegungsgleichung (7.1) nicht exakt gelöst werden.

Setzt man die Ansätze ein, so verbleibt ein Residuum  $\mathbf{R}$  mit

$$\mathbf{R} = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^* + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}}^* + \mathbf{K}\mathbf{u}^* + \mathbf{F}_{\text{nl}}^*(\mathbf{u}^*) - \mathbf{F}_{\text{Er}}, \quad (7.7)$$

und es lassen sich nun Lösungen berechnen, für die dieses Residuum minimal ausfällt. Auf Gl. (7.7) kann z. B. das Verfahren der gewichteten Residuen für Randwertaufgaben angewendet werden, wobei das Residuum innerhalb der Ränder im gewichteten Mittel verschwinden soll. Bei Schwingungen sind die Ränder durch die Schwingungsperiode  $T$  definiert. Mit den zu wählenden Gewichtungsfunktionen  $w_i$  folgt

$$\int_0^T \mathbf{R} w_i dt = 0 ; i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (7.8)$$

Werden für  $w_i$  die Ansatzfunktionen der Näherungslösung verwendet, so wird das Verfahren auch GALERKIN-Verfahren genannt, vgl. CARDONA ET AL. [9] und HERRMANN [34, S. 437]. Die hier gewählten Ansatzfunktionen sind die trigonometrischen Funktionen der Fourierreihe und das Problem wird überführt in ein nichtlineares algebraisches Gleichungssystem für die Fourierkoeffizienten

$$\hat{\mathbf{S}} \hat{\mathbf{U}} = \hat{\mathbf{F}}_{\text{Er}} - \hat{\mathbf{F}}_{\text{nl}} \quad (7.9)$$

mit den Vektoren der Fourierkoeffizienten

$$\hat{\mathbf{U}} = [\hat{\mathbf{u}}_0, \hat{\mathbf{u}}_1^c, \hat{\mathbf{u}}_1^s, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{k_h}^c, \hat{\mathbf{u}}_{k_h}^s]^T \quad (7.10)$$

$$\hat{\mathbf{F}}_{\text{nl}} = [\hat{\mathbf{F}}_{\text{nl},0}, \hat{\mathbf{F}}_{\text{nl},1}^c, \hat{\mathbf{F}}_{\text{nl},1}^s, \dots, \hat{\mathbf{F}}_{\text{nl},k_h}^c, \hat{\mathbf{F}}_{\text{nl},k_h}^s]^T \quad (7.11)$$

$$\hat{\mathbf{F}}_{\text{Er}} = [\hat{\mathbf{F}}_{\text{Er},0}, \hat{\mathbf{F}}_{\text{Er},1}^c, \hat{\mathbf{F}}_{\text{Er},1}^s, \dots, \hat{\mathbf{F}}_{\text{Er},k_h}^c, \hat{\mathbf{F}}_{\text{Er},k_h}^s]^T \quad (7.12)$$

und der dynamischen Steifigkeitsmatrix der linearen Struktur in der Form

$$\hat{\mathbf{S}} = \text{diag}(\mathbf{K}, \hat{\mathbf{S}}_1, \hat{\mathbf{S}}_2, \dots, \hat{\mathbf{S}}_{k_h}) ; \hat{\mathbf{S}}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{K} - k\Omega_{\text{Er}}^2 \mathbf{M} & -k\Omega_{\text{Er}} \mathbf{D} \\ k\Omega_{\text{Er}} \mathbf{D} & \mathbf{K} - k\Omega_{\text{Er}}^2 \mathbf{M} \end{bmatrix}. \quad (7.13)$$

Die Verläufe der nichtlinearen Kontaktkräfte können, wie in Abschnitt 6.2 für den Elastogleit-Kontakt, durch eine äquivalente Linearisierung als Feder-Dämpfer-Paare interpretiert werden. Die entsprechenden Fourierkoeffizienten für Steifigkeit und Dämpfung lassen sich mit der AFT-Methode durch Fouriertransformation der Kraftzeitverläufe über eine Periode ermitteln und in die Bewegungsgleichung einsetzen.

Der lineare Teil der Systembeschreibung erfüllt aufgrund der speziellen Form der Untermatrizen  $\hat{\mathbf{S}}_k$  immer die CAUCHY-RIEMANN Differentialgleichungen und lässt sich damit in komplexer Notation beschreiben. Die Koeffizienten der Fourierreihe können überführt werden in einen Vektor für die komplexen Amplituden

$$\underline{\hat{\mathbf{U}}} = [\hat{\mathbf{u}}_0, \hat{\mathbf{u}}_1^c + i\hat{\mathbf{u}}_1^s, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{k_h}^c + i\hat{\mathbf{u}}_{k_h}^s]^T = [\hat{\mathbf{u}}_0, \hat{\mathbf{u}}_1, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{k_h}]^T. \quad (7.14)$$

Der Vektor  $\underline{\hat{\mathbf{U}}}$  in Gl. (7.14) ist wegen  $\hat{\mathbf{u}}_k^c = \hat{\mathbf{u}}_k^{\Re}$  und  $\hat{\mathbf{u}}_k^s = \hat{\mathbf{u}}_k^{\Im}$  direkt verknüpft mit dem komplex erweiterten Ansatz in Gl. (7.2) und auch die nichtlinearen Kräfte  $\mathbf{F}_{\text{nl}}(\mathbf{u})$  können

entsprechend komplex erweitert beschrieben werden durch

$$F_{\text{nl}}(\mathbf{u}(t)) \approx \Re \left\{ \sum_{k=0}^{k_h} \hat{\mathbf{F}}_{\text{nl},k}(\hat{\mathbf{u}}_0, \hat{\mathbf{u}}_1, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{k_h}) e^{ik\Omega t} \right\}. \quad (7.15)$$

Das mit dem GALERKIN-Verfahren bestimmte Gleichungssystem in komplexer Form folgt zu

$$\hat{\mathbf{S}} \hat{\mathbf{U}} = \hat{\mathbf{F}}_{\text{Er}} - \hat{\mathbf{F}}_{\text{nl}} \quad (7.16)$$

mit der komplexen dynamischen Steifigkeitsmatrix

$$\hat{\mathbf{S}} = \text{diag}(\mathbf{K}, \hat{\mathbf{S}}_1, \hat{\mathbf{S}}_2, \dots, \hat{\mathbf{S}}_{k_h}) ; \quad \hat{\mathbf{S}}_k = \mathbf{K} - k\Omega_{\text{Er}}^2 \mathbf{M} + ik\Omega_{\text{Er}} \mathbf{D}. \quad (7.17)$$

Die Systembeschreibung reibungsgedämpfter Strukturen, welche mit der HBM in Form komplexer algebraischer Näherungsgleichungen vorliegt, kann sowohl mit komplexer, als auch mit rein reeller Darstellung erfolgen. Der komplexe Ansatz nach Gl. (7.2) und Gl. (7.15) wird von SIEWERT ET AL. [88], POUDOU & PIERRE [79] und PETROV [68] verwendet und führt auf komplexwertige und nichtlineare algebraische Gleichungen. Das komplexe Gleichungssystem in Gl. (7.16) muss über den Isomorphismus

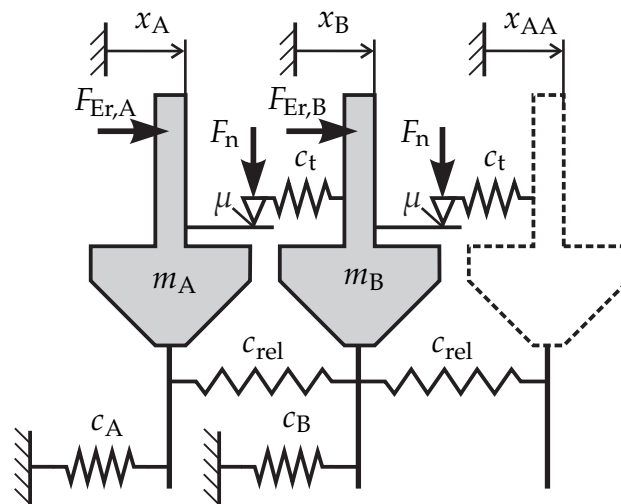
$$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \quad (7.18)$$

$$x + iy \cong \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (7.19)$$

in seinen Real- und Imaginärteil zerlegt werden, bevor das NEWTON-Verfahren angewendet werden kann, vgl. JÄNICH [37] und FREITAG & BUSAM [28]. Reelle Zwischenlösungen des iterativen Lösungsverfahrens sind entsprechend in die komplexe Darstellung zurückzutransformieren, damit diese in der Systembeschreibung berücksichtigt werden können. Phasenbeziehungen können mit dieser Darstellung, wie beim linearen System, anschaulich durch die komplexe e-Funktion beschrieben werden.

Alternativ kann die reelle Darstellung der Systembeschreibung nach Gl. (7.9) und Gl. (7.13) verwendet werden, vgl. PETROV [68] und LAXALDE ET AL. [50]. Eine Transformation der Systembeschreibung in jedem Iterationsschritt ist hier nicht notwendig. Allerdings muss eine Phasenbeziehung in Form trigonometrischer Funktionen für den Real- und Imaginärteil angegeben werden.

In den folgenden Abschnitten dieser Arbeit werden die nichtlinearen Systemgleichungen in komplexer Form beschrieben. Die Systembeschreibung kann auf diese Weise mit zyklischen Randbedingungen des Minimalmodells übersichtlich entwickelt werden. Mit Gl. (7.18) und Gl. (7.19) wird das ermittelte Residuum für die numerische Lösungsfindung durch das NEWTON-Verfahren in die reelle Darstellung überführt und Zwischenergebnisse entsprechend zurücktransformiert.



**Bild 7.1:** Minimalmodell des alternierend verstimmten Schaufelkranzes mit nichtlinearer Kopplung durch Elasto-Gleit-Kontaktelemente zwischen benachbarten Schwingern

## 7.2 Verstimmtes Modell mit Elasto-Gleit-Kontakt

Der Elasto-Gleit-Kontakt kann als vereinfachte Modellierung einer Kopplung durch Reibelemente betrachtet werden. Der Reibkörper selbst wird dabei nicht berücksichtigt, jedoch kann mit diesem Modell der Einfluss der Reibung auf die Systemdynamik beschrieben werden. Ein im Schaufelfußbereich wirkendes Reibelement führt im Fall des Haftens zu einer Versteifung des unteren Schaufelbereichs. Das Minimalmodell mit Elasto-Gleit-Kontakt kann als Näherungsmodell verwendet werden, sofern die Schwingungsform der freien und der versteiften Schaufel gleich ist. Die Steifigkeit des Kontaktmodells ist dabei an den Frequenzunterschied dieser Fälle anzupassen und nicht als Kontaktsteifigkeit zu interpretieren.

Die Bewegungsgleichungen für das Minimalmodell können mit komplexen Phasenbeziehungen für benachbarte Segmente bestimmt werden, wie es in Abschnitt 5.2 beschrieben wird. Für einfache Mehrmassenmodelle mit ein bis zwei Freiheitsgraden je Segment und komplexem Ansatz kann diese manuelle Rechnung mit vertretbarem Aufwand durchgeführt werden. An dieser Stelle wird ein allgemeineres Vorgehen zur Bestimmung der Bewegungsgleichungen vorgestellt, das auch auf Strukturmodelle mit einer deutlich höheren Anzahl an Freiheitsgraden anwendbar ist.

### 7.2.1 Entwicklung der Systemgleichung

Das Minimalmodell für alternierende Verstimmung aus Abschnitt 5.2 ist in abgewandelter Form in **Bild 7.1** dargestellt. Zwischen benachbarten Schwingern wirken Elasto-Gleit-Kontaktelemente mit Reibwert  $\mu$  und Tangentialsteifigkeit  $c_t$ . Das Modell besteht aus den zwei mit A und B bezeichneten Schwingern, sowie einem masselosen an die

Struktur gekoppelten Teil AA. Das Modell kann als Grundbaustein für den Aufbau einer zyklisch geschlossenen Schwingerkette betrachtet werden. Die Schwingerkette entsteht, wenn der A-Schwinger eines identischen Folgesegments gedanklich mit dem masselosen Teil in **Bild 7.1** zu einem Element verbunden wird. Diese Verknüpfung kann so fortgeführt werden, bis die ringförmige Gesamtstruktur geschlossen ist. Dabei ist keine Feder, keine Masse und auch keine Anregungskraft doppelt vorhanden. Der Grundbaustein ist wie ein zyklisches Puzzlestück eindeutig als Basisglied einer Schwingerkette definiert.

Der Baustein wird durch die allgemeine Differentialgleichung

$$M\ddot{\mathbf{u}} + D\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}_{\text{Er}} - \mathbf{F}_{\text{nl}}(\mathbf{u}) \quad (7.20)$$

mit

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_A & 0 & 0 \\ 0 & m_B & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} c_A + c_{\text{rel}} & -c_{\text{rel}} & 0 \\ -c_{\text{rel}} & c_B + 2c_{\text{rel}} & -c_{\text{rel}} \\ 0 & -c_{\text{rel}} & +c_{\text{rel}} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_{AA} \end{bmatrix} \quad (7.21)$$

beschrieben. Die Dämpfungsmatrix  $\mathbf{D}$  wird in Form modaler Dämpfungsgrade in der Systemgleichung ergänzt. Die Systemantwort lässt sich über die Harmonische Balance Methode durch harmonische Funktionen annähern. Für die periodische Bewegung wird, wie in Abschnitt 6.1, die grundharmonische Komponente als Näherung verwendet, sodass sich Gl. (7.20) mit der in Abschnitt 7.1 beschriebenen Projektion in das algebraische Gleichungssystem

$$\hat{\mathbf{S}}\hat{\mathbf{U}} = \hat{\mathbf{F}}_{\text{Er}} - \hat{\mathbf{F}}_{\text{nl}} \quad (7.22)$$

und

$$\hat{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} - \Omega_{\text{Er}}^2 \mathbf{M} + i\Omega_{\text{Er}} \mathbf{D} \end{bmatrix}; \quad \hat{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_0 \\ \hat{\mathbf{u}}_1 \end{bmatrix}; \quad \hat{\mathbf{F}}_{\text{Er}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{F}}_{\text{Er},0} \\ \hat{\mathbf{F}}_{\text{Er},1} \end{bmatrix}; \quad \hat{\mathbf{F}}_{\text{nl}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{F}}_{\text{nl},0} \\ \hat{\mathbf{F}}_{\text{nl},1} \end{bmatrix} \quad (7.23)$$

überführen lässt. In dem Vektor der Verschiebungen ist  $\hat{\mathbf{u}}_0 = [\hat{x}_{A,0}, \hat{x}_{B,0}, \hat{x}_{AA,0}]^T$  der statische Anteil und  $\hat{\mathbf{u}}_1 = [\hat{x}_{A,1}, \hat{x}_{B,1}, \hat{x}_{AA,1}]^T$  enthält die harmonischen Komponenten.

Mit der komplexen Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$  werden zyklische Randbedingungen eingeführt. Die Komponenten des masselosen Teils in  $\hat{\mathbf{U}}$  werden über den Phasenversatz  $\Delta\tilde{\psi} = k\Delta\psi$  für  $k = 0$  und  $k = 1$  mit der Bewegung des Schwingers A gekoppelt.

$$\hat{\mathbf{U}} = \mathbf{T}\hat{\mathbf{U}}_z; \quad \mathbf{T} = \text{diag}(\mathbf{T}_0, \mathbf{T}_1); \quad \mathbf{T}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ e^{i\Delta\psi} & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.24)$$

Nach Abschnitt 5.4 werden durch eine Erregerordnung mit Phasenversatz  $\Delta\varphi$  zwei Schwingungsformen der Struktur angeregt. Beide Schwingungsformen weisen den gleichen Phasenversatz zwischen Schwingern gleichen Typs auf. Die zyklische Kopplung wird daher durch den doppelten von der Erregerordnung vorgegebenen Phasenversatz  $\Delta\psi = 2\Delta\varphi$  beschrieben. Die Komponenten des Grundbausteins sind nach der Transfor-

mation auf das zyklische A-B-Segment reduziert und es folgt

$$\underline{\hat{U}}_z = [\underline{\hat{u}}_{AB,0}, \underline{\hat{u}}_{AB,1}]^T = [\hat{x}_{A,0}, \hat{x}_{B,0}, \hat{x}_{A,1}, \hat{x}_{B,1}]^T. \quad (7.25)$$

Die Transformation der dynamischen Steifigkeitsmatrix auf zyklische Koordinaten führt auf

$$\underline{T}^H \underline{\hat{S}} \underline{T} = \underline{\hat{S}}_z = \begin{bmatrix} \underline{S}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \underline{S}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{AB,0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \underline{K}_{AB} - \Omega_{Er}^2 \underline{M}_{AB} + i\Omega_{Er} \underline{D}_{AB} \end{bmatrix} \quad (7.26)$$

mit den transformierten Strukturmatrizen

$$\underline{T}_0^T \underline{K} \underline{T}_0 = \underline{K}_{AB,0} = \begin{bmatrix} c_A + 2c_{rel} & -2c_{rel} \\ -2c_{rel} & c_B + 2c_{rel} \end{bmatrix} \quad (7.27)$$

$$\underline{T}_1^H \underline{M} \underline{T}_1 = \underline{M}_{AB} = \begin{bmatrix} m_A & 0 \\ 0 & m_B \end{bmatrix} \quad (7.28)$$

$$\underline{T}_1^H \underline{D} \underline{T}_1 = \underline{D}_{AB} \quad (7.29)$$

$$\underline{T}_1^H \underline{K} \underline{T}_1 = \underline{K}_{AB} = \begin{bmatrix} c_A + 2c_{rel} & -c_{rel}(1 + e^{-i\Delta\psi}) \\ -c_{rel}(1 + e^{+i\Delta\psi}) & c_B + 2c_{rel} \end{bmatrix}. \quad (7.30)$$

Der hier beschriebene Grundbaustein führt mit der komplexen Transformationsmatrix  $\underline{T}$  auf das Minimalmodell für ein alternierend verstimmtes System. Aus Gl. (7.22) folgt nach der Transformation die zyklische Beschreibung

$$\underline{\hat{S}}_z \underline{\hat{U}}_z = \underline{\hat{F}}_{Er,z} - \underline{\hat{F}}_{nl,z} \quad (7.31)$$

$$\underline{\hat{F}}_{Er,z} = \underline{T}^H \underline{\hat{F}}_{Er} \quad (7.32)$$

$$\underline{\hat{F}}_{nl,z} = \underline{T}^H \underline{\hat{F}}_{nl}. \quad (7.33)$$

Für den linearen Teil des Gleichungssystems ist noch die Dämpfungsmatrix  $\underline{D}_{AB}$  zu bestimmen. Für eine Dämpfungsbeschreibung mit modalen Dämpfungsgraden wird die Modaltransformation

$$\underline{\hat{U}}_z = \underline{\Phi}_z \underline{\hat{Q}}_z; \quad \underline{\Phi}_z = \text{diag}(\underline{\Phi}_0, \underline{\Phi}_1) \quad (7.34)$$

angewendet. Die Modalmatrizen  $\underline{\Phi}_0$  und  $\underline{\Phi}_1$  enthalten die Eigenvektoren des zyklischen Modells und resultieren aus zwei Modalanalysen mit dem Phasenversatz  $\Delta\tilde{\psi} = k\Delta\psi$  für  $k = 0$  und  $k = 1$ . Einsetzen von Gl. (7.34) in das Gleichungssystem Gl. (7.31) und Multiplikation von links mit der Hermiteschen Modalmatrix führt auf

$$\underline{\Phi}_z^H \underline{\hat{S}}_z \underline{\Phi}_z \underline{\hat{Q}}_z = \underline{\Phi}_z^H \underline{\hat{F}}_{Er,z} - \underline{\Phi}_z^H \underline{\hat{F}}_{nl,z}. \quad (7.35)$$

Ein Nachteil der Formulierung in Gl. (7.35) ist die Beschreibung der Bewegung durch modale Koordinaten, wohingegen für die Berechnung der nichtlinearen Kontaktkräfte die physikalischen Verschiebungen  $\underline{\hat{U}}_z$  benötigt werden. Die Transformation zwischen dem physikalischen und dem modalen Raum kann umgangen werden, wenn alternativ der Vektor  $\underline{\hat{U}}_z$  direkt in dem komplexen Gleichungssystem erhalten bleibt. Gl. (7.35) wird

dafür mit der Nachgiebigkeitsmatrix  $\underline{\hat{H}}_z$  umgeformt zu

$$\underline{\hat{U}}_z = \underline{\hat{H}}_z (\underline{\hat{F}}_{Er,z} - \underline{\hat{F}}_{nl,z}) \quad (7.36)$$

$$\underline{\hat{H}}_z = \underline{\Phi}_z \left( \underline{\Phi}_z^H \underline{\hat{S}}_z \underline{\Phi}_z \right)^{-1} \underline{\Phi}_z^H = \begin{bmatrix} \underline{H}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \underline{H}_1 \end{bmatrix}. \quad (7.37)$$

Ein Vergleich mit Gl. (7.31) zeigt, dass die Nachgiebigkeitsmatrix  $\underline{\hat{H}}_z = \underline{\hat{S}}_z^{-1}$  der Inversen der Steifigkeitsmatrix entspricht. Anstelle der Matrixinversion kann  $\underline{\hat{H}}_z$  nach Gl. (7.37) über die Modalmatrix  $\underline{\Phi}_z$  ermittelt werden. Wie bereits bei der Berechnung der linearen Frequenzantwort in Abschnitt 5.6 ergibt sich eine Summe mit den dyadischen Produkten der Eigenvektoren

$$\underline{\hat{H}}_k = \sum_{h=1}^2 \frac{\underline{\phi}_{k,h} \underline{\phi}_{k,h}^H}{\omega_{k,h}^2 - k\Omega_{Er}^2 + i2D_{k,h}\omega_{k,h}k\Omega_{Er}} ; k = 0, 1 \quad (7.38)$$

für die zwei Systemeigenformen  $h = 1, 2$  mit statischer und dynamischer Komponente ( $k = 0, 1$ ). Mit dieser Darstellung lassen sich auch die modalen Dämpfungsgrade für jede Schwingungsform  $\omega_{k,h}$  des zyklischen Segments berücksichtigen. Gl. (7.36) wird durch

$$\underline{R}_z = \underline{\hat{U}}_z - \underline{\hat{H}}_z (\underline{\hat{F}}_{Er,z} - \underline{\hat{F}}_{nl,z}) \quad (7.39)$$

in eine Nullstellensuche für das Residuum  $\underline{R}_z$  überführt und mit dem NEWTON-Verfahren gelöst.

## 7.2.2 Berechnung der nichtlinearen Kräfte

Die nichtlinearen Kräfte werden mit der AFT-Methode ermittelt. Die in **Bild 7.1** enthaltenen Elasto-Gleit-Kontaktelemente benötigen als Eingangsgrößen die Relativverschiebungen zwischen den Schwingern, die sich aus den nichtzyklischen harmonischen Komponenten  $\underline{\hat{u}}_0 = [\hat{x}_{A,0}, \hat{x}_{B,0}, \hat{x}_{A+1,0}]^T$  und  $\underline{\hat{u}}_1 = [\hat{x}_{A,1}, \hat{x}_{B,1}, \hat{x}_{A+1,1}]^T$  mit einer Matrix  $\underline{T}_w$  bestimmen lassen

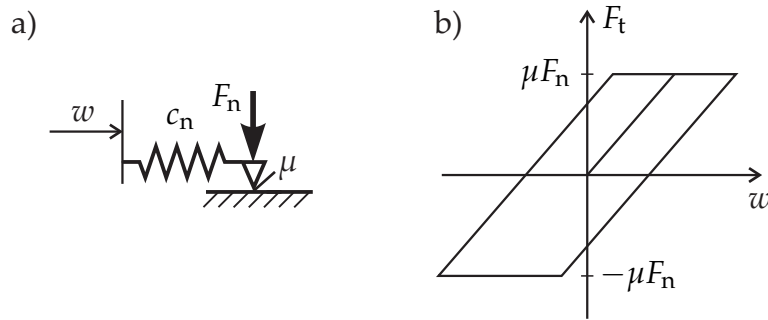
$$\begin{bmatrix} \underline{\hat{w}}_0 \\ \underline{\hat{w}}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{T}_w & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \underline{T}_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\hat{u}}_0 \\ \underline{\hat{u}}_1 \end{bmatrix} ; \underline{T}_w = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (7.40)$$

Die Transformation auf zyklische Koordinaten liefert den Zusammenhang zwischen Relativverschiebungen und Systemgrößen des zu lösenden Problems

$$\begin{bmatrix} \underline{\hat{w}}_0 \\ \underline{\hat{w}}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{T}_w & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \underline{T}_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{T}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \underline{T}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\hat{u}}_{AB,0} \\ \underline{\hat{u}}_{AB,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{T}_{w,0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \underline{T}_{w,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\hat{u}}_{AB,0} \\ \underline{\hat{u}}_{AB,1} \end{bmatrix}. \quad (7.41)$$

Der Vektor der Relativgrößen enthält mit dem statischen reellen Anteil  $\underline{\hat{w}}_0 = [\hat{w}_{A,0}, \hat{w}_{B,0}]^T$  und dem harmonischen Anteil  $\underline{\hat{w}}_1 = [\hat{w}_{A,1}, \hat{w}_{B,1}]^T$  die Eingangsgrößen für die Kontaktberechnung. Mit Index A ist der Kontakt zwischen dem A- und dem B-Schwinger gekennzeichnet. Der Index B bezeichnet den Kontakt zwischen dem B-Schwinger und dem, außerhalb des Segments liegenden, folgenden A-Schwinger, dessen Bewegung aus der





**Bild 7.2:** Hysterese des Elasto-Gleit-Kontaktelements mit konstanter Normalkraft; a) Elasto-Gleitkontakt-Element mit Relativverschiebung  $w$  als Eingangssignal; b) qualitativer Verlauf der Hysterese mit Neukurve aus dem Koordinatenursprung

Bewegung des A-Schwingers mit einem Phasenversatz folgt. Aus den so erhaltenen Relativgrößen wird der auf die Anregungsfrequenz normierte zeitliche Verlauf  $w(\tau)$  für zwei Schwingungsperioden  $2T = 4\pi/\Omega$  wie folgt bestimmt

$$w(\tau) = \hat{w}_0 + \Re \{ \hat{w}_1 \} \cos \tau - \Im \{ \hat{w}_1 \} \sin \tau ; \tau = [0, 4\pi) . \quad (7.42)$$

Das negative Vorzeichen vor der Sinuskomponente ergibt sich, weil die Reibkräfte dissipativen Charakter haben, vgl. Abschnitt 7.1. Die gewählte Intervallgröße von zwei Perioden führt auf den korrekten Kraft-Weg-Verlauf nachdem die Neukurve der Hysterese verlassen wurde, vgl. **Bild 7.2**. Es ist zu beachten, dass es sich bei der Definition von  $\tau$  um ein rechtsoffenes Intervall handelt. Es gilt  $0 \leq \tau < 4\pi$ , damit ein Folgeintervall ohne Überschneidung angehängt werden kann. Die Kontaktkräfte werden für diskrete Abtastpunkte  $l = 1, 2, \dots, l_{\max}$  von  $\tau$  mit  $\tau(1) = 0$  und  $\tau(l_{\max}) = 4\pi(l_{\max} - 1)/l_{\max}$  bestimmt. Mit einer Prediktor-Korrektor-Routine wird zunächst unter der Annahme des Haftens eine Vorhersage  $F_{t,X}^P(l)$  durch

$$F_{t,X}^P(l) = \begin{cases} c_{t,X} w(l), & \text{für } l = 1 \\ c_{t,X} (w(l) - w(l-1)) + F_{t,X}(l-1), & \text{für } l > 1 \end{cases} ; X = A, B \quad (7.43)$$

bestimmt. Der Prädiktorschritt basiert auf der Historie des Kontaktverlaufs, sodass der Ausgangspunkt für  $l = 1$  gesondert berechnet werden muss. Mit diesem Zwischenergebnis wird die endgültige Kontaktkraft durch die Überprüfung der Haftbedingung ermittelt

$$F_{t,X}(l) = \begin{cases} F_{t,X}^P(l), & \text{für } |F_{t,X}^P(l)| < \mu F_{n,X} \text{ (Haften)} \\ \mu F_{l,X} \text{sgn}(F_{t,X}^P(l)), & \text{für } |F_{t,X}^P(l)| \geq \mu F_{n,X} \text{ (Gleiten)} \end{cases} ; X = A, B. \quad (7.44)$$

Das Resultat ist ein für den Elasto-Gleit-Kontakt typischer Kontaktkraftverlauf mit konstanter Normalkraft über eine Periode, wie er in **Bild 6.6 c)** auf Seite 73 dargestellt ist. Die Bestimmung der Fourierkoeffizienten mit der diskreten Fouriertransformation und die Rücktransformation aus den Relativkoordinaten kann Abschnitt E.1 des Anhangs entnommen werden.

### 7.2.3 Parameterwahl und Systemanalyse

Für die Analyse des Schwingungsverhaltens alternierend verstimmter und reibungsgekoppelter Schaufelkränze wird die Frequenzverstimmung der Schwinger durch den dimensionslosen Faktor  $\kappa_{\text{ver}}$  als Verstimmung der Federn in dem Modell aufgeprägt. Die Steifigkeiten der Schwinger folgen damit zu  $c_A = c(1 - \kappa_{\text{ver}})$  und  $c_B = c(1 + \kappa_{\text{ver}})$ . Die relative Kopplung wird mit dem Faktor  $\kappa_{\text{rel}}$  durch  $c_{\text{rel}} = c\kappa_{\text{rel}}$  festgelegt. Diese Wahl der Strukturparameter ermöglicht den Vergleich mit Ergebnissen der Analyse des linearen Systems ohne Reibungskopplung, vgl. Abschnitt 5.6.

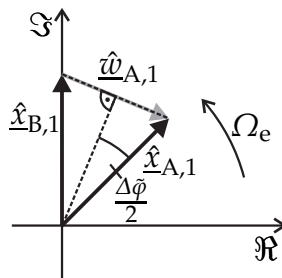
Für das Systemverhalten sind die Verhältnisse zwischen Kontakt- und Systemparametern entscheidend. Als Referenz wird der Kontakt zwischen A- und B-Schwinger des unverstimmten und ungekoppelten Systems gewählt. Die Bezeichnungen A und B dienen der Orientierung, auch wenn keine Verstimmung vorliegt. Für die Bewertung der Dämpfungsleistung wird der jeweilige Resonanzfall betrachtet, welcher sich durch die Kontaktsteifigkeit zu höheren Frequenzen hin verschiebt. Für die Reibungsdämpfung mit Elasto-Gleit-Kontakt gilt nach Abschnitt 6.1 Gl. (6.22)

$$\hat{F}_{A,\text{diss, res}} = \frac{4\mu F_n}{\pi} \left( 1 - \frac{\mu F_n}{c_t \hat{w}_{A,1,\text{res}}} \right), \quad (7.45)$$

mit der Amplitude  $\hat{w}_{A,1,\text{res}}$  der ersten harmonischen Komponente der Relativverschiebung zwischen A- und B-Schwinger in Resonanz. Für die dynamische Analyse wird die Kontaktnormalkraft  $F_n$  als Variationsparameter gewählt. Gl. (7.45) lässt sich mit  $F_{n,\text{haft}}$  als oberen Grenzfall der Normalkraft, für den ständig Haften vorliegt, umformulieren zu

$$\hat{F}_{A,\text{diss, res}} = \frac{4\mu F_n}{\pi} \left( 1 - \frac{F_n}{F_{n,\text{haft}}} \right); \quad F_{n,\text{haft}} = \frac{c_t \hat{w}_{A,1,\text{haft, res}}}{\mu}. \quad (7.46)$$

Für die Simulation ist folglich der Bereich der Kontaktnormalkraft  $0 \leq F_n \leq F_{n,\text{haft}}$  interessant, in dem das Optimum der Reibungsdämpfung liegt. Für  $F_n > F_{n,\text{haft}}$  verhält sich das System linear. Die obere Grenze ist dabei sowohl durch die Kontaktparameter, als auch durch die Relativbewegung  $\hat{w}_{A,1,\text{haft, res}}$  in Resonanz des Haftens bestimmt. Diese Relativbewegung lässt sich im unverstimmten Fall direkt durch den Phasenversatz  $\Delta\varphi$  der Schwingungsform, bzw. der Anregung bestimmen. Die Amplitude kann nach **Bild 7.3** graphisch ermittelt werden und für den Haftzustand folgt



**Bild 7.3:** Zeigerdiagramm der Relativverschiebung zwischen A- und B-Schwinger in der komplexen Ebene

$$\hat{w}_{A,1,\text{haft,res}} = 2 \sin\left(\frac{\Delta\tilde{\varphi}}{2}\right) \hat{x}_{A,1,\text{haft,res}}. \quad (7.47)$$

Die Resonanzüberhöhung  $\hat{x}_{A,1,\text{haft,res}}$  der Schwinger im Fall des Haftens lässt sich wie bei dem Dämpfungsleistungsdiagramm nach CAMERON ET AL. [7] in Abschnitt 2.2.2 auf Seite 14 durch die zusätzliche Steifigkeit des Kontakts ermitteln. Die Kontaktsteifigkeit wirkt in Anlehnung an die Relativkopplung in Abhängigkeit der Schwingungsform versteifend und es folgt

$$\hat{x}_{A,1,\text{haft,res}} = \frac{\hat{F}_{\text{Er}}}{(c + c_t(1 - \cos(\Delta\tilde{\varphi}))2D)}. \quad (7.48)$$

Die Grenze der Kontaktnormalkraft, ab der im Kontakt nur Haften während einer Schwingungsperiode vorliegt, kann damit bestimmt werden zu

$$F_{n,\text{haft}} = \frac{\hat{F}_{\text{Er}} \sin\left(\frac{\Delta\tilde{\varphi}}{2}\right)}{\mu D \left(\frac{c}{c_t} + 1 - \cos(\Delta\tilde{\varphi})\right)}. \quad (7.49)$$

Der Bereich der Kontaktnormalkraft für die Analyse des Systemverhaltens wird nach Gl. (7.49) so gewählt, dass eine effektive Reibungsdämpfung vorliegt. Für die Anregungsamplitude, den Reibwert und die Kontaktsteifigkeit werden die Verhältnisse

$$\frac{\hat{F}_{\text{Er}}}{\mu} = 3 \text{ N}; \quad \frac{c}{c_t} = 1 \quad (7.50)$$

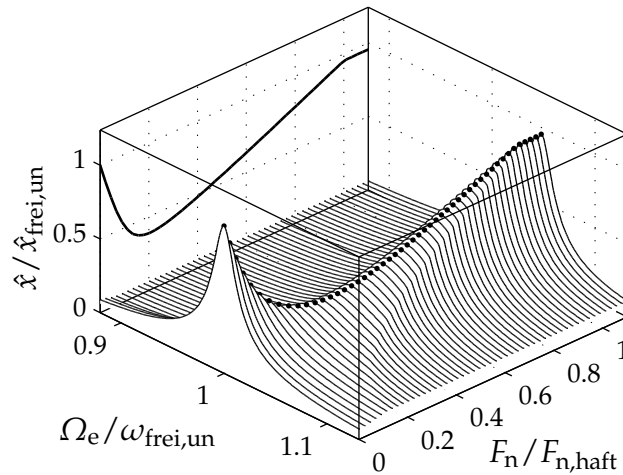
verwendet. Die modale Dämpfung  $D$  hat zusammen mit dem Verhältnis von Anregungsamplitude zu Schwingermasse Auswirkung auf die Resonanzüberhöhung. Mit  $D = 0.01$  und  $\hat{F}_{\text{Er}}/m = 1 \text{ N/kg}$  ist das System im linearen Fall schwach gedämpft.

Der Phasenwinkel  $\Delta\varphi$  ist entscheidend für die angeregten Schwingungsformen bei alternierender Verstimmung. Für eine repräsentative Analyse wird eine Schaufelzahl  $N = 20$  in Kombination mit einer Erregerordnung  $EO = 21$  gewählt, die der Anzahl der Statorschaufeln entspricht. Der resultierende Phasenwinkel der angeregten Schwingungsform des unverstimmten Systems folgt daraus zu

$$\Delta\tilde{\varphi} = \frac{2\pi EO}{N} = \frac{\pi}{10} \quad (7.51)$$

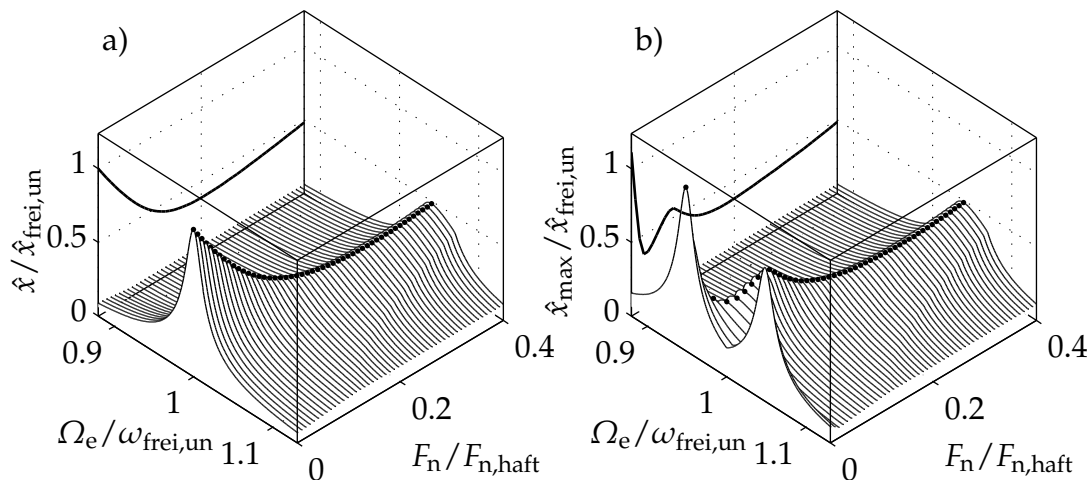
und liegt im Bereich zwischen  $0^\circ$  und  $90^\circ$ . Bei einer alternierenden Verstimmung wird so primär die erste Schwingungsform des A-B-Segments angeregt, vgl. Abschnitt 5.6.

**Bild 7.4** zeigt als Referenz das Simulationsergebnis des unverstimmten Systems mit 50 Amplitudengängen, die für Werte von  $F_n/F_{n,\text{haft}}$  im Bereich von 0 bis knapp über 1 bestimmt wurden. Für die Schwingungsantworten dient der Amplitudengang des freien unverstimmten Systems mit  $F_n/F_{n,\text{haft}} = 0$  als Referenz. Die Verbindung der Resonanzen ist auf die Amplituden-Kraft-Ebene projiziert und zeigt die Optimierungskurve für die Dämpfungsauslegung mit dem Optimum der Reibungsdämpfung bei einem Wert um  $F_n/F_{n,\text{haft}} = 0.2$ . Die Steigung der Optimierungskurve gibt die Sensitivität gegenüber einer Veränderung der Normalkraft an. Typischerweise ist das System für zu geringe Kontaktnormalkräfte sensitiver, als bei zu hohen Werten bezogen auf das Optimum.

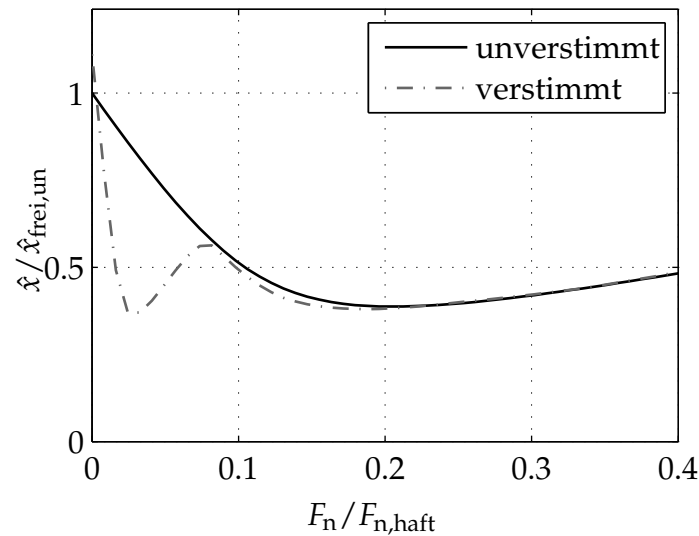


**Bild 7.4:** Schwingungsantworten des unverstimmten Systems mit Elasto-Gleit-Kontaktelementen für  $\kappa_{\text{rel}} = 0$

Im Folgenden wird das System mit  $\kappa_{\text{ver}} = 0.1$  verstimmt und zunächst ohne relative Kopplung betrachtet. **Bild 7.5 b)** zeigt die Einhüllende  $\hat{x}_{\text{max}} = \max(\hat{x}_A, \hat{x}_B)$  der Amplitudengänge des verstimmten Systems. Der Ausschnitt  $0 \leq F_n/F_{n,\text{haft}} \leq 0.4$ , der Kontaktnormalkraftwerte enthält die Bereiche optimaler Reibungsdämpfung und wird im folgenden genauer betrachtet. Für höhere Werte der Kontaktnormalkraft nähert sich das unverstimmte und das verstimmte System jeweils dem linearen Grenzfall an, in dem die Kontaktkraft wie eine relative Kopplung wirkt. In **Bild 7.5 a)** ist für einen direkten Vergleich der entsprechende Ausschnitt der Schwingungsantworten aus **Bild 7.4** dargestellt. Die Amplitudengänge in **Bild 7.5 a)** und **b)** sind beide auf die Resonanz des freien ( $F_n = 0$ ) und unverstimmten Systems bezogen. Die Grenzfälle für eine verschwindende Normalkraft entsprechen den Antworten des linearen Systems aus Abschnitt 5.6. Für geringe Werte der Kontaktnormalkraft sind die Resonanzen der verstimmten Schwinger separiert. Das System nähert sich durch eine Kontaktkrafterhöhung dem Verhalten der unverstimmten Konfiguration mit einer einzigen Resonanz an.



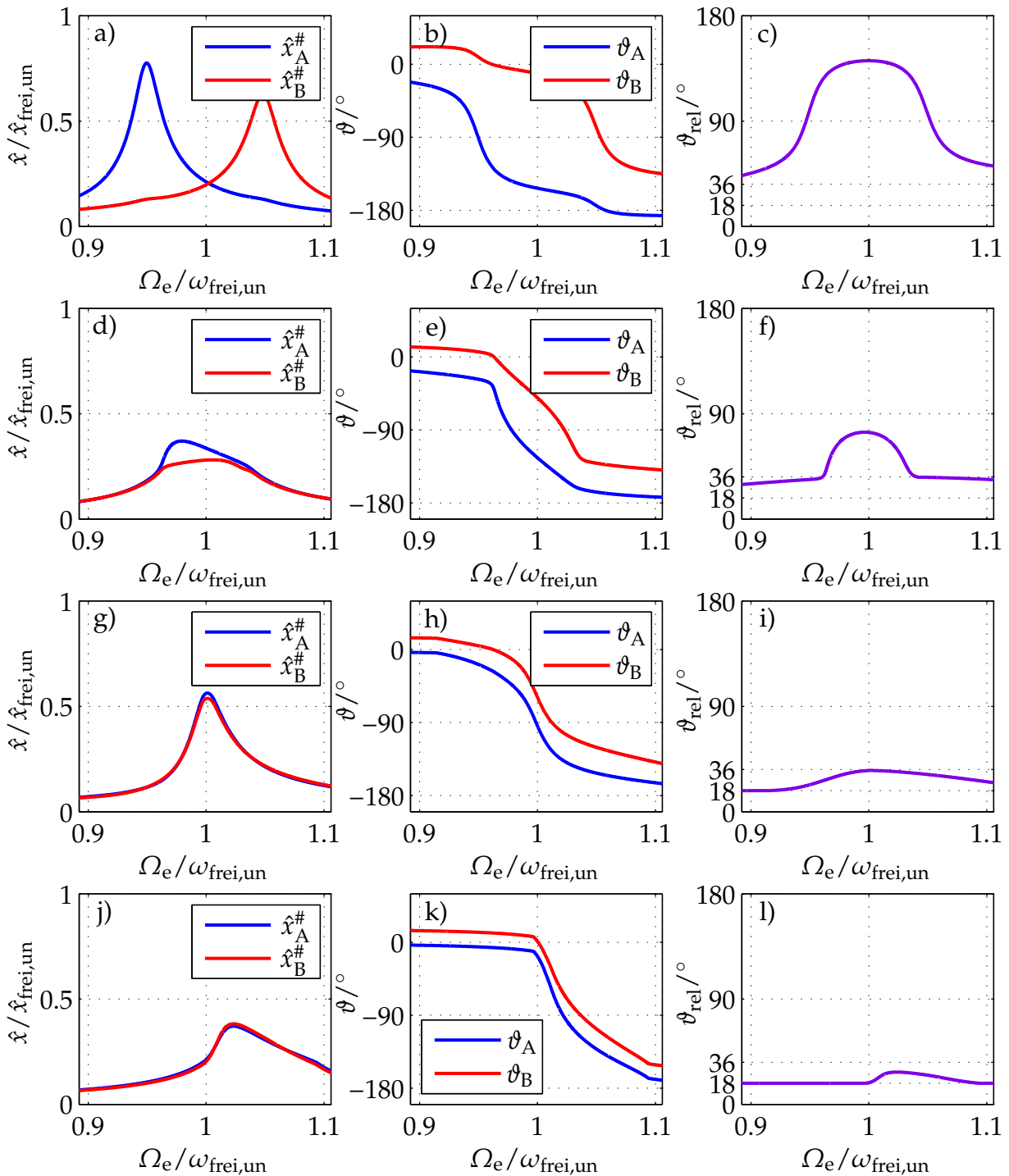
**Bild 7.5:** Schwingungsantworten des Systems mit Elasto-Gleit-Kontaktelementen für  $\kappa_{\text{rel}} = 0$ ; a) unverstimmtes System; b) mit  $\kappa_{\text{ver}} = 0.1$  verstimmtes System



**Bild 7.6:** Vergleich der Dämpfungsoptimierungskurven des unverstimmten und des mit  $\kappa_{\text{ver}}$  verstimmt Systems

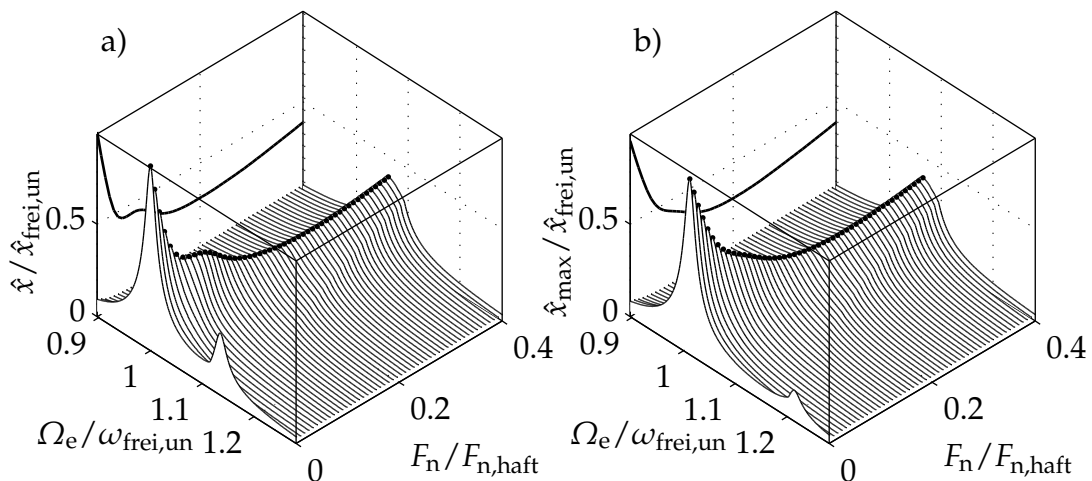
In **Bild 7.6** sind die Dämpfungsoptimierungskurven des verstimmt und des unverstimmten Systems überlagert dargestellt. Insbesondere in dem Bereich  $F_n/F_{n,\text{haft}} < 0.2$  zeigt sich mit dem zusätzlichen Minimum ein bessere Dämpfungsleistung durch die alternierende Verstimmung. Die Begründung für dieses höhere Maß an Energiedissipation lässt sich aus dem Diagramm in **Bild 6.4** auf Seite 71 ableiten, das die Reibkraft des idealen COULOMB-schen Kontakts in Abhängigkeit des Phasenversatzes zeigt. In dem unverstimmten System ist der relative Phasenversatz konstant und entspricht der Anregung, die mit  $\Delta\varphi = 18^\circ$  primär die erste Eigenform anregt. Durch die alternierende Verstimmung wird die zweite Schwingungsform mit angeregt, die mit einen größeren Phasenversatz nach **Bild 6.4** eine höhere effektive Reibkraft erzeugt. Aus dieser Erklärung wird klar, dass der positive Einfluss einer Verstimmung nur vorhanden ist, wenn primär die erste Schwingungsform mit einem Phasenversatz im Bereich  $0^\circ$  und  $90^\circ$  angeregt wird.

**Bild 7.7** zeigt für vier Fälle die Amplituden- und Phasengänge des A- und B-Schwingers. Die Ergebnisse sind mit  $\hat{x}_A^\# = \hat{x}_A/\hat{x}_{\text{opt}}$  und  $\hat{x}_B^\# = \hat{x}_B/\hat{x}_{\text{opt}}$  jeweils auf die Resonanz des freien und unverstimmten Systems normiert. Zusätzlich ist jeweils der relative Phasenversatz  $\vartheta_{\text{rel}}$  zwischen den verstimmt Schwingern dargestellt. **Bild 7.7 a)–c)** beziehen sich auf den ersten nichtlinearen Amplitudengang aus **Bild 7.5 b)** mit einem Verhältnis von  $F_n/F_{n,\text{haft}} \approx 0.008$ . Der nichtlineare Einfluss der Kontaktkräfte ist moderat und die Schwingungsantwort ist vergleichbar mit der Antwort des linearen Systems ohne Reibungskopplung. **Bild 7.7 d)–f)** zeigen die Systemantwort des ersten Minimums der Dämpferoptimierungskurve bei  $F_n/F_{n,\text{haft}} \approx 0.033$ . Die Amplitudengänge zeigen deutlich nichtlinearen Charakter mit getrennten Resonanzen für A- und B-Schwinger. Der Wertebereich des relativen Phasenversatzes hat sich verringert und nimmt seinen größten Wert im Bereich der Resonanzen an. Die Schwinger weisen außerhalb der Resonanzen einen nahezu konstanten Phasenversatz zueinander und gleiche Amplituden auf. In **Bild 7.7 g)–i)** ist die Schwingungsantwort für das lokale Maximum der Dämpfer-



**Bild 7.7:** Amplituden-, Phasengänge und relativer Phasenversatz der verstimmtten Schwinger für  $\kappa_{\text{ver}} = 0.1$  und  $\kappa_{\text{rel}} = 0$ ; a)–c)  $F_n/F_{n,\text{haft}} \approx 0.008$ ; d)–f) Minimum der Dämpfungsoptimierung bei  $F_n/F_{n,\text{haft}} \approx 0.033$ ; g)–i) Maximum der Dämpfungsoptimierung bei  $F_n/F_{n,\text{haft}} \approx 0.08$ ; j)–l) Minimum der Dämpfungsoptimierung bei  $F_n/F_{n,\text{haft}} \approx 0.2$

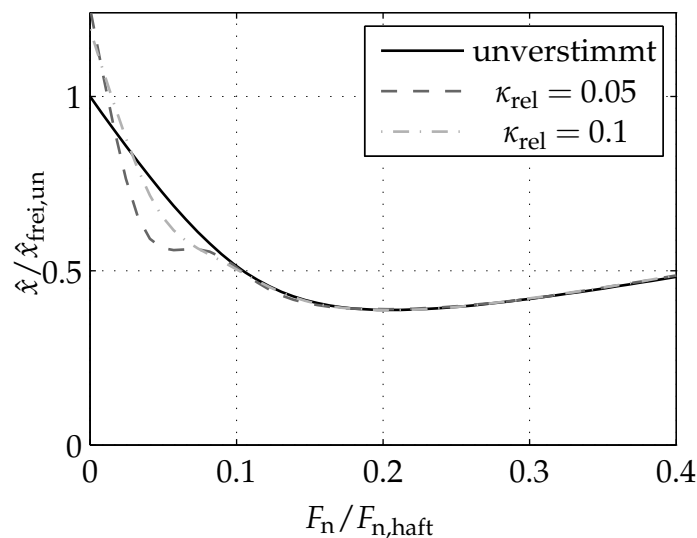
optimierungskurve bei  $F_n/F_{n,\text{haft}} \approx 0.08$  zu sehen, vgl. **Bild 7.6**. Die lokal schlechteste Dämpfungswirkung geht einher mit einem relativen Phasenversatz  $\vartheta_{\text{rel}} = 36^\circ$ . Das bedeutet, dass zwischen A- und B-Schwinger bereits der durch die Anregung aufgeprägte



**Bild 7.8:** Schwingungsantworten des mit  $\kappa_{\text{ver}} = 0.1$  verstimmten Systems mit Elasto-Gleit-Kontaktelementen und Relativkopplung; a) Relative Kopplung mit  $\kappa_{\text{rel}} = 0.05$  b) Relative Kopplung mit  $\kappa_{\text{rel}} = 0.1$

Segmentphasenwinkel  $\Delta\psi = 2\Delta\varphi$  vorliegt und zwischen B-Schwinger und dem Schwinger des benachbarten Segments kein Phasenversatz existiert. Jeweils zwei Schwinger im Kranz bewegen sich gleichphasig und nach **Bild 7.7 g)** mit nahezu gleicher Amplitude, sodass nur in einem der beiden Reibkontakte Energie dissipiert wird. **Bild 7.7 j)–l)** zeigt den Bereich des zweiten Minimums bei  $F_n/F_{n,\text{haft}} \approx 0.2$  mit einer zunehmenden Synchronisation der verstimmten Schwinger. Der relative Phasenversatz folgt überwiegend dem durch die Anregung vorgegebenen Phasenversatz  $\Delta\varphi = 2\pi EO/N = 18^\circ$ . Nur um die Resonanz ist  $\vartheta_{\text{rel}}$  leicht angehoben und führt damit zu einer verbesserten Reibungsdämpfung gegenüber dem unverstimmten System.

Eine relative Kopplung zwischen benachbarten Schwingern wirkt sich nach Gl. (5.25), vgl. Seite 45, negativ auf den Verstimmungsfaktor  $\alpha$  der Eigenformen aus. **Bild 7.8 a)** zeigt



**Bild 7.9:** Vergleich der Dämpfungsoptimierungskurven des unverstimmten Systems mit den mit  $\kappa_{\text{rel}} = 0.05$  und  $\kappa_{\text{rel}} = 0.1$  verstimmten Systemen

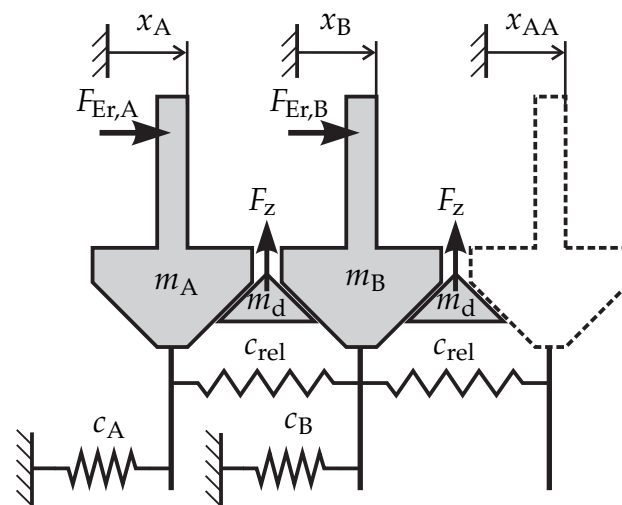
die Einhüllenden der Schwingungsantworten des alternierend verstimmten Systems mit zusätzlicher relativer Kopplung  $\kappa_{\text{rel}} = 0.05$ . In **Bild 7.8 b**) ist das Simulationsergebnis mit einem Kopplungsfaktor  $\kappa_{\text{rel}} = \kappa_{\text{ver}} = 0.1$  abgebildet. Der Einfluss der Verstimmung auf das Systemverhalten ist deutlich reduziert und die Dämpfungsoptimierungskurve nähert sich schneller dem Verlauf des unverstimmten Systems an. Zum Vergleich sind die Optimierungskurven mit relativer Kopplung und die Optimierungskurve des unverstimmten Systems in **Bild 7.9** dargestellt. Der Effekt der verbesserten Dämpfungsleistung bei geringen Kontaktkräften reduziert sich deutlich mit der Relativkopplung.

### 7.3 Verstimmtes Modell mit Reibelementen

Im dem folgenden Kapitel wird das nichtlineare Verhalten des Minimalmodells mit Reibelementen und alternierender Verstimmung untersucht. Bei der Entwicklung der Systemgleichung werden für die statische und dynamische Systemanalyse Annahmen für den Reibelementkontakt benötigt. Nachdem diese Annahmen formuliert sind und die Systemgleichung vorliegt folgt die Berechnung der nichtlinearen Kontaktkräfte mit veränderlicher Kontaktnormalkraft. Anschließend wird das dynamische Systemverhalten anhand numerischer Ergebnisse analysiert.

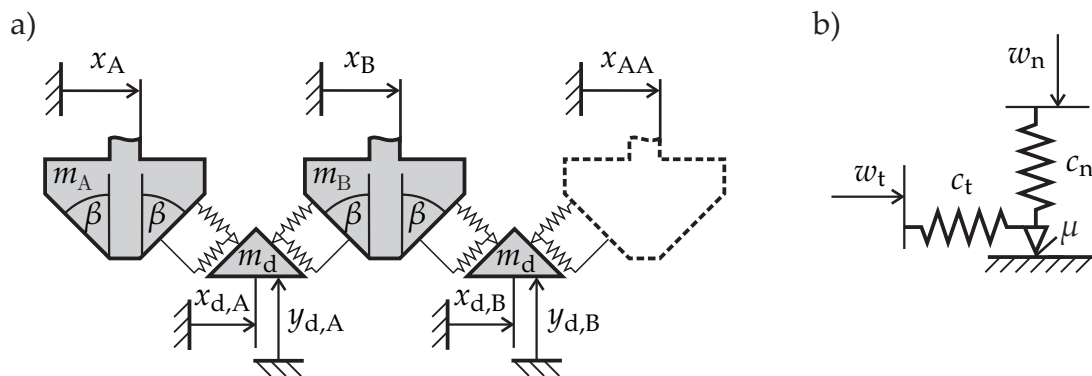
#### 7.3.1 Entwicklung der Systemgleichung

**Bild 7.10** zeigt das Modell mit separaten keilförmigen Reibkörpern zwischen benachbarten Schwingern. Das System enthält neben den Freiheitsgraden der A- und B-Schwingers noch weitere Freiheitsgrade für die Bewegung der massebehafteten Reibelemente, vgl.



**Bild 7.10:** Minimalmodell des alternierend verstimmten Schaufelkranzes mit nichtlinearer Kopplung durch keilförmige Reibelemente zwischen benachbarten Schwingern





**Bild 7.11:** Darstellung des Punktkontakts zwischen Reibkörpern und Schwingern; a) Freiheitsgrade und Koordinaten des Modells mit zwei Schwingern und zwei Reibkörpern; b) zweidimensionales Punktkontaktmodell mit Penaltyfedern

**Bild 7.11 a).** Jedes Reibelement wird durch zwei translatorische Freiheitsgrade beschrieben. Geometrische Abmessungen sind damit nicht erforderlich und das in **Bild 7.11 b)** dargestellte zweidimensionale Punktkontaktmodell ist ausreichend für die Berechnung der nichtlinearen Reaktionskräfte.

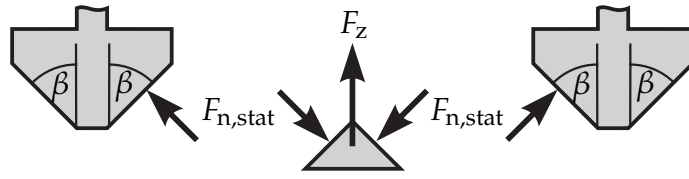
Aufgrund der nicht eindeutig zu bestimmenden statischen Gleichgewichtslage der Reibkörper ist eine Annahme für die Berechnung erforderlich. Tangential- und Normalkräfte in den beiden Kontaktbereichen des Reiblements führen auf insgesamt vier Unbekannte für zwei Kräftesummen. Nach PANNING ET AL. [65] kann die Berechnung der statischen Gleichgewichtslage des Reibkörpers vorab für den reibungsfreien Kontakt ermittelt werden. Die auf diese Weise gewonnenen Kontaktnormalkräfte werden als nichtveränderliche statische Komponenten für die nachgeschaltete dynamische Analyse verwendet.

Die Bewegungsgleichung des Systems mit Reibelementen hat die Form

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}_{\text{Er}} - \mathbf{F}_{\text{nl}}(\mathbf{u}). \quad (7.52)$$

Die Struktur ist linear-elastisch und die Kontaktkräfte sind in einem Vektor für nichtlineare Kräfte zusammengefasst. Die Dimension der Systemgleichung ist aufgrund der massebehafteten Reibelemente gegenüber der Beschreibung in Abschnitt 7.2.1 erweitert. Die Massenmatrix enthält einen Anteil  $\mathbf{M}_s$  für die Schwinger und einen Anteil  $\mathbf{M}_d$  für die Reibelemente. Die Steifigkeitsmatrix ist um Nulleinträge erweitert, weil die separaten Reibkörper nicht an die Umgebung gefesselt sind. Der Vektor  $\mathbf{u}$  und die Strukturmatrizen folgen bis auf die später definierte modale Dämpfung zu

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_d \end{bmatrix}; \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_s \\ \mathbf{u}_d \end{bmatrix}. \quad (7.53)$$



**Bild 7.12:** Freikörperbild zur Berechnung der statischen Gleichgewichtslage der Reibelemente bei Vernachlässigung tangentialer Kontaktkräfte

Die Einträge in der Systemgleichung für die Schwinger sind mit

$$\mathbf{M}_s = \begin{bmatrix} m_A & 0 & 0 \\ 0 & m_B & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{K}_s = \begin{bmatrix} c_A + c_{rel} & -c_{rel} & 0 \\ -c_{rel} & c_B + 2c_{rel} & -c_{rel} \\ 0 & -c_{rel} & +c_{rel} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u}_s = \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_{AA} \end{bmatrix} \quad (7.54)$$

identisch zu der Systembeschreibung im vorherigen Abschnitt mit Elasto-Gleit-Kontakt. Die Reibelemente werden mit jeweils zwei translatorischen Freiheitsgraden beschrieben durch

$$\mathbf{M}_d = \begin{bmatrix} m_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_d \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u}_d = \begin{bmatrix} x_{d,A} \\ y_{d,A} \\ x_{d,B} \\ y_{d,B} \end{bmatrix}. \quad (7.55)$$

Die statischen Kontaktkräfte für ein Reibelement werden nach **Bild 7.12** ohne den Einfluss der Reibung vor der dynamischen Analyse ermittelt. Aufgrund der in dem Modell gewählten symmetrischen Plattformwinkel vereinfacht sich die Berechnung von  $F_{n,stat}$  zu

$$F_{n,stat} = \frac{F_z}{2 \sin \beta}. \quad (7.56)$$

Dieser konstante Anteil der Kontaktnormalkraft wird bei der Berechnung der nichtlinearen Kräfte in Abschnitt 7.3.2 als Referenz für die dynamischen Kontaktkräfte verwendet. Der auf die grundharmonische Komponente ohne Gleichanteil reduzierte Ansatz für das GALERKIN-Verfahren führt auf die algebraische Gleichung

$$\hat{\mathbf{S}} \hat{\mathbf{U}} = \hat{\mathbf{F}}_{Er} - \hat{\mathbf{F}}_{nl}. \quad (7.57)$$

Der Vektor  $\hat{\mathbf{U}}$  enthält mit

$$\hat{\mathbf{U}} = \left[ \hat{x}_{A,1}, \hat{x}_{B,1}, \hat{x}_{AA,1}, \hat{x}_{d,A,1}, \hat{y}_{d,A,1}, \hat{x}_{d,B,1}, \hat{y}_{d,B,1} \right]^T \quad (7.58)$$

die Amplituden der fundamentalen Harmonischen als Näherung der periodischen Lösung des Problems. Der Zusatz 1 zur Bezeichnung des ersten harmonischen Anteils der Fourierreihenentwicklung wird im Folgenden für eine übersichtliche Darstellung vernachlässigt.

Die für die Transformation auf eine zyklisch geschlossene Schwingerkette benötigte Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$  enthält die bereits in Gl. (7.24) beschriebenen Untermatrix  $\mathbf{T}_1$  ergänzt um eine Einheitsmatrix für die Einträge der Reibelemente. Die Transformation

wird beschrieben durch

$$\underline{\hat{U}} = \underline{T} \underline{\hat{U}}_z ; \underline{T} = \text{diag}(\underline{T}_1, E) ; \underline{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ e^{i\Delta\psi} & 0 \end{bmatrix} ; E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \quad (7.59)$$

Nach Anwendung der Transformation ergibt sich die zyklische Systemgleichung

$$\underline{\hat{S}}_z \underline{\hat{U}}_z = \underline{\hat{F}}_{\text{Er},z} - \underline{\hat{F}}_{\text{nl},z}, \quad (7.60)$$

mit

$$\underline{\hat{S}}_z = \underline{T}^H \underline{\hat{S}} \underline{T} ; \underline{\hat{F}}_{\text{Er},z} = \underline{T}^H \underline{\hat{F}}_{\text{Er}} ; \underline{\hat{F}}_{\text{nl},z} = \underline{T}^H \underline{\hat{F}}_{\text{nl}} . \quad (7.61)$$

Die dynamische Steifigkeitsmatrix des zyklischen Systems enthält neben den aus Abschnitt 7.2.1 bekannten und mit AB gekennzeichneten Matrizen für die Schwinger noch die Massenmatrix  $\underline{M}_d$  und wird beschrieben durch

$$\underline{\hat{S}}_z = \begin{bmatrix} \underline{K}_{\text{AB}} - \Omega_{\text{Er}}^2 \underline{M}_{\text{AB}} + i\Omega_{\text{Er}} \underline{D}_{\text{AB}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\Omega_{\text{Er}}^2 \underline{M}_d \end{bmatrix} . \quad (7.62)$$

Für die Berücksichtigung modaler Dämpfungsgrade wird die modale Form der Systemgleichung benötigt. Um das Problem in physikalischen Koordinaten zu beschreiben, erfolgt eine Rücktransformation aus dem Modalraum mit der Inversen von  $\underline{\hat{S}}_z$ , sodass Gl. (7.60) überführt wird in

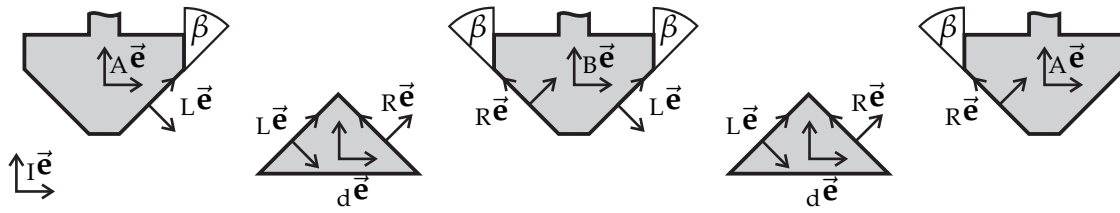
$$\underline{\hat{U}}_z = \underline{\hat{H}}_z (\underline{\hat{F}}_{\text{Er},z} - \underline{\hat{F}}_{\text{nl},z}) \quad (7.63)$$

$$\underline{\hat{H}}_z = \underline{\Phi}_z \left( \underline{\Phi}_z^H \underline{\hat{S}}_z \underline{\Phi}_z \right)^{-1} \underline{\Phi}_z^H = \begin{bmatrix} \underline{\hat{H}}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \underline{\hat{S}}_d^{-1} \end{bmatrix} . \quad (7.64)$$

Die Matrix  $\underline{\hat{H}}_1$  ist die aus dem vorherigen Abschnitt bekannte Nachgiebigkeitsmatrix des alternierend verstimmtten Schaufelkranzmodells in modaler Beschreibung für  $k = 1$ , vgl. Gl. (7.38). Die Inverse von  $\underline{\hat{S}}_d$  ist aufgrund der Diagonalgestalt der Massenmatrix  $\underline{M}_d$  einfach zu berechnen und ist wieder eine Diagonalmatrix mit den Werten  $1/(-\Omega_{\text{Er}}^2 m_d)$  auf der Hauptdiagonalen. Die Systemgleichung ist damit in Gl. (7.63) bis auf die nichtlinearen Kontaktkräfte vollständig beschrieben.

### 7.3.2 Berechnung der nichtlinearen Kräfte

Im Gegensatz zu der Elasto-Gleit-Kontaktformulierung sind die separaten Reibkörper über Punktkontakte mit Normal- und Tangentialkräften an die Schwinger gekoppelt. Die Kontaktnormalkraft setzt sich aus in Gl. (7.56) angegebenen statischen und einer überlagerten dynamischen Komponente zusammen. Die Relativverschiebungen zwischen Schwingern und Reibelementen lassen sich durch entsprechende Matrizen aus dem Vektor der Absolutverschiebungen bestimmen. Für die Kontaktkraftberechnung werden die



**Bild 7.13:** Koordinatensysteme zur Beschreibung der Relativverschiebungen zwischen Schwingern und Reibelementen

Relativverschiebungen in den jeweiligen Kontaktkoordinaten als Eingangsgrößen benötigt. Nach **Bild 7.13** werden für jeden Kontaktpunkt Transformationsmatrizen zwischen Körper- und Kontaktkoordinaten definiert. Für jeden der vier Kontaktpaarungen in dem Modell werden im folgenden zunächst die benötigten Relativverschiebungen ermittelt und anschließend allgemein die Berechnung der Kontaktkräfte in Normal- und Tangentialrichtung beschrieben.

Die vier verschiedenen Kontaktpaarungen sind ausgehend von den Dämpfern mit den Indizes AL, AR, BL und BR gekennzeichnet, wobei der erste Buchstabe den Dämpfer und der zweite Buchstabe den linken, bzw. rechten Kontaktpunkt aus Dämpfersicht benennt. Für den Kontakt zwischen Schwinger A und Dämpfer A folgt damit die Transfermatrix  $T_{w,AL}$  aus den nichtzyklischen Koordinaten  $\hat{\underline{U}}$  zu

$${}_I\hat{\underline{w}}_{AL} = T_{w,AL}\hat{\underline{U}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{\underline{U}} = \begin{bmatrix} \hat{x}_A - \hat{x}_{d,A} \\ -\hat{y}_{d,A} \end{bmatrix}. \quad (7.65)$$

Der Index I bei  ${}_I\hat{\underline{w}}_{AL}$  bezieht sich auf das inertielle Koordinatensystem, welches sowohl für die Schwinger, als auch für die Reibelemente als globales Bezugssystem dient. Für die in **Bild 7.13** dargestellten Koordinatensysteme gilt

$${}_A\vec{e} \equiv {}_B\vec{e} \equiv {}_d\vec{e} \equiv {}_I\vec{e}. \quad (7.66)$$

Die Transformation von  ${}_I\hat{\underline{w}}_{AL}$  in das Kontaktkoordinatensystem für den linksseitigen Reibelementkontakt lautet

$${}_L\hat{\underline{w}}_{AL} = {}^{LI}A{}_I\hat{\underline{w}}_{AL}, \quad (7.67)$$

mit der Drehtransformation von I-Koordinaten in L-Koordinaten durch

$${}^{LI}A = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}. \quad (7.68)$$

Die Transformation auf zyklische Koordinaten führt auf

$${}_L\hat{\underline{w}}_{AL} = {}^{LI}AT_{w,AL}T\hat{\underline{U}}_z. \quad (7.69)$$

Die Relativverschiebungen der weiteren Kontaktpaarungen werden analog durch die folgenden Transformationen ermittelt. Für den Kontakt zwischen Reibelement A und Schaufel B folgt

$${}_R\hat{\underline{w}}_{AR} = {}^{RI}AT_{w,AR}T\hat{\underline{U}}_z, \quad (7.70)$$

mit

$${}^{\text{RI}}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}; \quad \mathbf{T}_{w,\text{AR}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.71)$$

Für die Kontaktpunkte an Reibelement B ergeben sich die Gleichungen

$${}^{\text{L}}\hat{\mathbf{w}}_{\text{BL}} = {}^{\text{LI}}\mathbf{A}\mathbf{T}_{w,\text{BL}}\mathbf{T}\hat{\mathbf{U}}_z, \quad (7.72)$$

bzw.

$${}^{\text{R}}\hat{\mathbf{w}}_{\text{BR}} = {}^{\text{RI}}\mathbf{A}\mathbf{T}_{w,\text{BR}}\mathbf{T}\hat{\mathbf{U}}_z. \quad (7.73)$$

Die Drehmatrizen sind bereits in Gl. (7.68) und Gl. (7.71) gegeben und die zugehörigen Transformationsmatrizen auf Relativkoordinaten lauten

$$\mathbf{T}_{w,\text{BL}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{T}_{w,\text{BR}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7.74)$$

Die Transformationen sind dabei an die Ausrichtung der Kontaktkoordinatensysteme angepasst, sodass eine positive Relativverschiebung in Normalenrichtung zu Durchdringen der Kontaktpartner führt. Mit dieser Definition der Relativbewegung ist eine allgemeine Formulierung der Kontaktkraftberechnung möglich.

Die Berechnung der Kontaktkräfte erfolgt durch die AFT-Methode, wobei die Nachgiebigkeit in Kontaktnormalenrichtung zu einer veränderlichen Kontaktnormalkraft führt. Für die im Folgenden beschriebene Berechnung der Kontaktkräfte wird die Relativverschiebung in der Form

$$\hat{\mathbf{w}}_{\text{kon}} = [\hat{\mathbf{w}}_n, \hat{\mathbf{w}}_t]^T \quad (7.75)$$

stellvertretend für die vier ermittelten Verschiebungsvektoren  ${}^{\text{L}}\hat{\mathbf{w}}_{\text{AL}}$ ,  ${}^{\text{R}}\hat{\mathbf{w}}_{\text{AR}}$ ,  ${}^{\text{L}}\hat{\mathbf{w}}_{\text{BL}}$  und  ${}^{\text{R}}\hat{\mathbf{w}}_{\text{BR}}$  verwendet. Die Indizes n und t bezeichnen dabei die Relativbewegung normal und tangential in der betreffenden Kontaktzone. Aus diesen Relativgrößen werden die normierten zeitlichen Verläufe  $w_{\text{kon}}(\tau)$  für zwei Schwingungsperioden  $2T = 4\pi/\Omega$  bestimmt

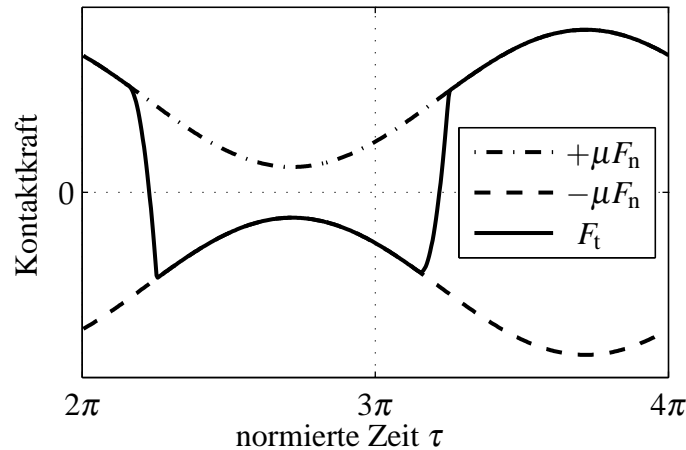
$$w_{\text{kon}}(\tau) = \Re \{ \hat{\mathbf{w}}_{\text{kon}} \} \cos \tau - \Im \{ \hat{\mathbf{w}}_{\text{kon}} \} \sin \tau; \quad \tau = [0, 4\pi). \quad (7.76)$$

Die Kontaktnormalkraft folgt aus der Überlagerung von  $F_{n,\text{stat}}$  mit der dynamischen Kontaktnormalkraft aufgrund der Relativverschiebung im Kontakt in diskreten Abtastschritten  $l = 1, 2, \dots, l_{\text{max}}$  zu

$$F_n(l) = \max(F_{n,\text{stat}} + c_n w_n, 0). \quad (7.77)$$

Die Normalkraft kann mit dieser Beschreibung nur Werte  $F_n(l) \geq 0$  annehmen und wirkt damit unilateral. Mit der ermittelten veränderlichen Normalkraft wird nachfolgend die Tangentialkraft für den Kontaktpunkt mit einem Prädiktor-Korrektor-Verfahren bestimmt. Zunächst wird unter der Annahme des Haftens der Prädiktorschritt durch

$$F_t^{\text{P}}(l) = \begin{cases} c_t w(l), & \text{für } l = 1 \\ c_t (w(l) - w(l-1)) + F_t(l-1), & \text{für } l > 1 \end{cases} \quad (7.78)$$



**Bild 7.14:** Qualitative Darstellung der Kontaktkraftverläufe mit veränderlicher Kontaktnormalkraft in dem Bereich  $2\pi \leq \tau \leq 4\pi$

berechnet. Die Überprüfung der Haftbedingung führt mit dem Korrektorschritt

$$F_t(l) = \begin{cases} F_t^p(l), & \text{für } |F_t^p(l)| < \mu F_n(l) \\ \mu F_n(l) \operatorname{sgn}(F_t^p(l)), & \text{für } |F_t^p(l)| \geq \mu F_n(l) \end{cases} . \quad (7.79)$$

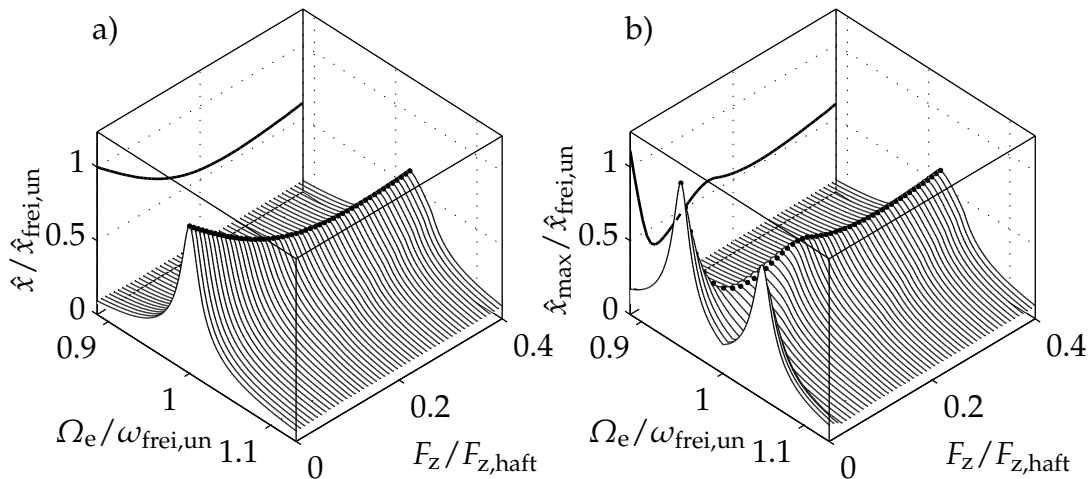
auf das endgültige Ergebnis für den zeitlichen Verlauf der tangentialen Kontaktkraft.

**Bild 7.14** zeigt qualitativ einen typischen Verlauf der Tangentialkraft mit veränderlichen Grenzen für den Haft-Gleit-Übergang durch die veränderliche Normalkraft. Die Anwendung der diskreten Fouriertransformation für den Reibelementkontakt kann in Abschnitt E.2 gefunden werden. Die so ermittelten Koeffizienten der Kontaktkräfte sind auf die jeweilige Relativbewegung bezogen und müssen für jeden der vier Kontaktpunkte entsprechend der angegebenen Transformation zurücktransformiert werden. Der Gesamtvektor  $\hat{\underline{F}}_{nl,z}$  ergibt sich aus der Summe der vier Teilergebnisse für jeden Kontaktpunkt.

### 7.3.3 Parameterwahl und Systemanalyse

Die Parameter für die lineare Struktur bleiben unverändert zu den bisherigen Analysen in der vorliegenden Arbeit. Eine analytische Beschreibung der Parameterzusammenhänge, wie in Abschnitt 7.2.3 ist bei dem hier entwickelten Modell nicht möglich. Das Systemverhalten ist im unverstimmten Fall jedoch qualitativ vergleichbar zu dem Modell mit Elasto-Gleit-Kontaktelementen und die Parameterwahl orientiert sich mit  $\hat{F}_{Er}/\mu = 1/3$  und  $c/c_{n,t} = 1$  an der Parameterwahl des vorhergehenden Abschnitts. Die Plattformwinkel der Schwinger werden mit  $\beta = 45^\circ$  modelliert. Die Anregung erfolgt mit  $\hat{F}_{Er}/m = 1 \text{ N/kg}$  und einer Erregerordnung von  $EO = 21$ .

Im Gegensatz zu der Variation der Kontaktnormalkraft in Abschnitt 7.2.3 wird jetzt die auf die Reibkörper wirkende Zentrifugalkraft variiert. In realen Maschinen lässt sich bei stationärem Betrieb die Zentrifugalkraft über die Masse der Reibelemente beeinflussen. Dieser Zusammenhang wird durch



**Bild 7.15:** Schwingungsantworten des Systems mit Reibelementkontakt für  $\kappa_{\text{rel}} = 0$ ; a) Unverstimmtes System; b) Mit  $\kappa_{\text{ver}} = 0.1$  verstimmtes System

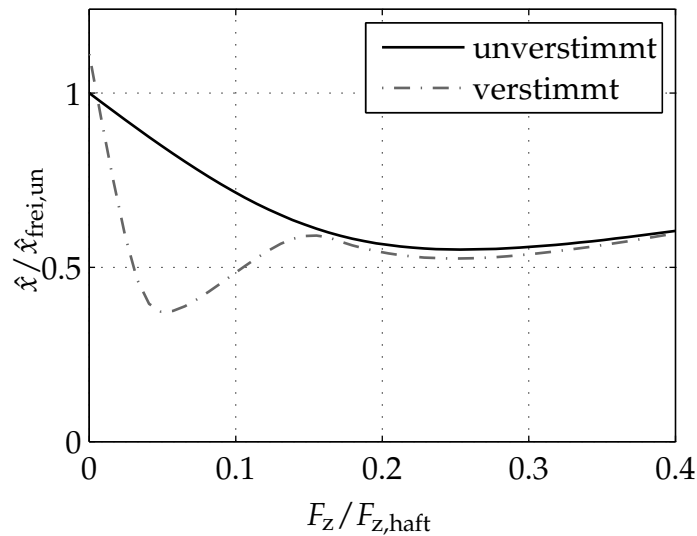
$$m_d = F_z \frac{m_{d,0}}{F_{z,0}} \quad (7.80)$$

in der Simulation berücksichtigt. Für die Abschätzung eines physikalisch plausiblen Verhältnisses  $m_{d,0}/F_{z,0}$  wird eine stationäre Strömungsmaschine mit einer Nenndrehzahl  $n_0 = 3000 \text{ min}^{-1}$ , die einer Drehfrequenz von  $f_{\text{rot}} = 50 \text{ Hz}$  entspricht, betrachtet, vgl. [52, S. 194]. Mit einer Abschätzung des Radius zwischen Rotationsachse und Reibelementschwerpunkt von  $r = 0.1 \text{ m}$  ergibt sich aus der Gleichung für die Zentrifugalkraft in einem rotierenden System der Zusammenhang

$$\frac{F_{z,0}}{m_{d,0}} = \Omega_{\text{rot}}^2 r \approx 10000 \frac{\text{N}}{\text{kg}}. \quad (7.81)$$

Mit Gl. (7.81) wird die Masse der Reibelemente an die Zentrifugalkraft angepasst. Innerhalb einer Frequenzgangberechnung wird der Drehzahleinfluss vernachlässigt und sowohl die Zentrifugalkraft, als auch die Reibelementmasse konstant gehalten. Die Veränderung der Drehfrequenz in dem betrachteten Frequenzbereich ist über  $\Omega_{\text{rot}} = \Omega_{\text{Er}}/EO$  an die Anregungsfrequenz des Rotors gekoppelt. Bei  $EO = 21$  verändert sich die Drehzahl über den Frequenzgang nur gering und wird daher nicht betrachtet.

In **Bild 7.15** sind die Schwingungsantworten des unverstimmten Systems und des mit  $\kappa_{\text{ver}} = 0.1$  verstimmten Systems mit Reibelementkontakt ohne Relativkopplung dargestellt. Die Amplituden sind auf die Resonanz des freien und unverstimmten Systems normiert. Der qualitative Verlauf der Schwingungsantworten ist mit den Ergebnissen in Abschnitt 7.2.3 für den Elasto-Gleit-Kontakt vergleichbar. Die Dämpfungsoptimierungskurve weist auch hier ein zusätzliches lokales Minimum auf und die bei kleinen Zentrifugalkräften getrennten Resonanzen vereinigen sich für zunehmende Werte von  $F_z$ . Die positive Auswirkung der alternierend verstimmtung auf die Reibungsdämpfung zeigt sich auch für den Reibelementkontakt. Mit dem Vergleich der Optimierungskurven für den unverstimmten und den verstimmtten Fall in **Bild 7.16** wird die Amplitudenreduktion verdeutlicht. Das alternierend verstimmtte System weist auch im Bereich der optimalen



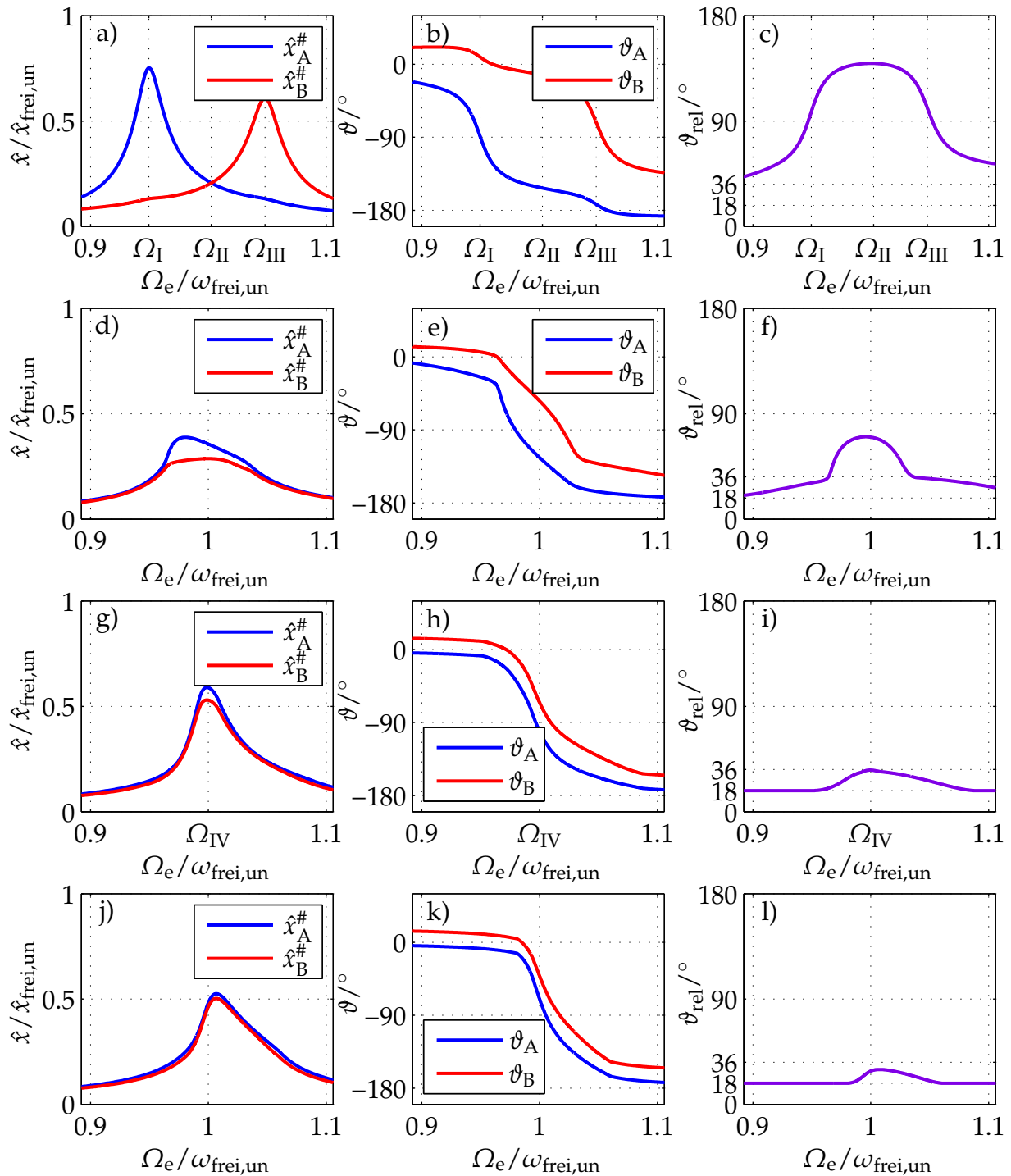
**Bild 7.16:** Vergleich der Dämpfungsoptimierungskurven des unverstimmten und des verstimzten Systems

Dämpfung des unverstimmten Systems eine bessere Dämpfungswirkung auf.

Die Ergebnisse der Simulation des verstimzten Modells mit Elasto-Gleit-Kontaktelementen aus Abschnitt 7.2.3 können an dieser Stelle bestätigt werden. In **Bild 7.17** sind für die vier Fälle der Zentrifugalkraft die Amplitudengänge, Phasengänge und der relative Phasenversatz der verstimzten Schwinger dargestellt. **Bild 7.17 a)–c)** zeigt die Ergebnisse für eine geringe Kopplung mit  $F_z / F_{z,haft} \approx 0.016$ . In **Bild 7.17 d)–f)** ist die Schwingungsantwort der optimalen Reibungsdämpfung bei  $F_z / F_{z,haft} \approx 0.065$  dargestellt. Die Synchronisation der verstimzten Schwinger außerhalb des Resonanzbereichs ist deutlich erkennbar. Im Resonanzbereich weisen A- und B-Schwinger hingegen sichtbare Unterschiede in den Amplituden auf und der relative Phasenversatz hebt sich deutlich ab. Die Bewegung des Systems für das lokale Maximum der Dämpfungsoptimierungskurve bei  $F_z / F_{z,haft} \approx 0.147$  führt auch mit Reibelementen zu einem Phasenversatz von  $36^\circ$  in Resonanz, was dem Segmentphasenwinkel der Anregung entspricht, vgl. **Bild 7.17 i)**. In **Bild 7.17 j)–k)** ist für das zweite Minimum im Bereich der optimalen Dämpfung des unverstimmten Systems eine Annäherung an das unverstimmte Systemverhalten abzulesen. Der relative Phasenversatz entspricht außerhalb der Resonanz dem Phasenversatz der Anregung von  $\Delta\varphi = 18^\circ$ . Die Abweichung von  $\vartheta_{rel}$  im Bereich der Resonanz führt auch hier auf eine höhere Dämpfung durch den Reibkontakt und damit auf niedrigere Amplituden im Vergleich zum unverstimmten Fall mit einem konstanten relativen Phasenversatz.

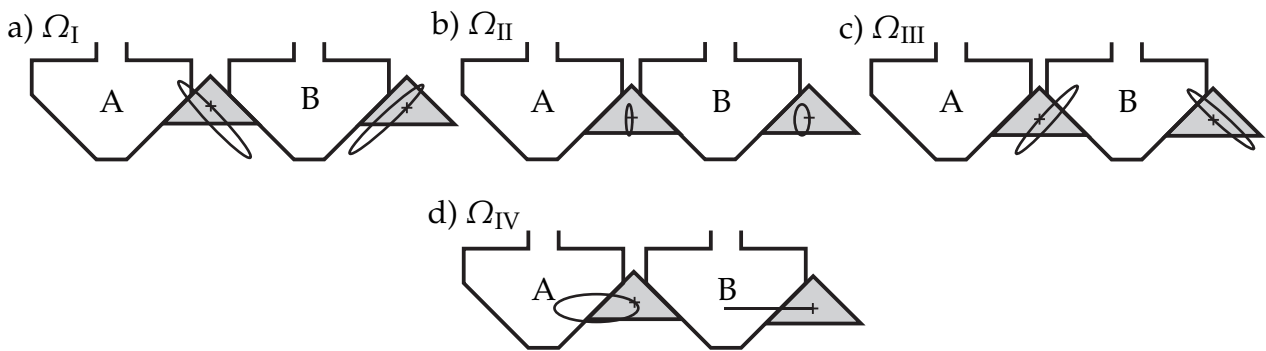
In **Bild 7.18** sind Momentaufnahmen des zeitlichen Verlaufs der Schwingungsantwort des verstimzten Systems dargestellt. Der harmonische Ansatz zur Lösung des nichtlinearen Problems führt auf elliptische Bahnkurven der Reibelementbewegung. In **Bild 7.18 a)–c)** sind die Systemantworten für die Anregungsfrequenzen  $\Omega_I$ ,  $\Omega_{II}$  und  $\Omega_{III}$  der Amplitudengänge in **Bild 7.17 a)** veranschaulicht. In der ersten Resonanz bei  $\Omega_I$  bewegen sich hauptsächlich die A-Schwinger und die Bewegungstrajektorien der Reibelemen-





**Bild 7.17:** Amplituden-, Phasengänge und relativer Phasenversatz der verstimmtten Schwinger für  $\kappa_{\text{ver}} = 0.1$  und  $\kappa_{\text{rel}} = 0$ ; a)–c)  $F_z/F_{z,\text{haft}} \approx 0.016$ ; d)–f) Minimum der Dämpfungsoptimierung bei  $F_z/F_{z,\text{haft}} \approx 0.065$ ; g)–i) Maximum der Dämpfungsoptimierung bei  $F_z/F_{z,\text{haft}} \approx 0.147$ ; j)–l) Minimum der Dämpfungsoptimierung bei  $F_z/F_{z,\text{haft}} \approx 0.245$

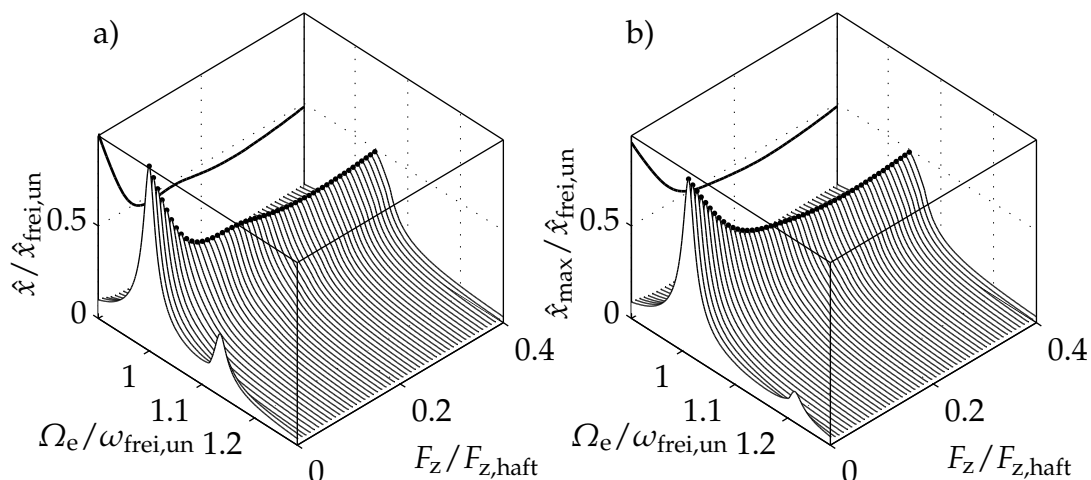
te sind flache und geneigte Ellipsen. Bei  $\Omega_{\text{II}}$  antworten beide Schwinger mit gleicher Amplitude und die Reibelementbewegungen sind vorwiegend vertikal. Mit Erhöhung der Frequenz auf  $\Omega_{\text{III}}$  neigen sich die Bewegungsellipsen passend zu der Resonanz des



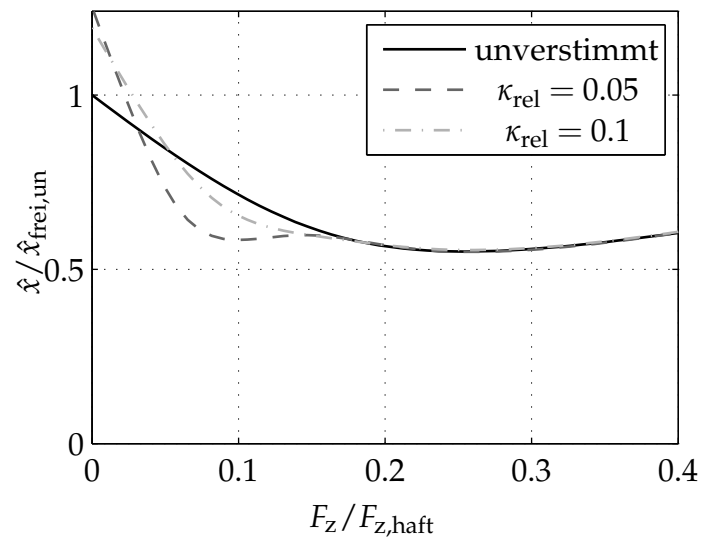
**Bild 7.18:** Momentaufnahmen des zeitlichen Verlaufs der Schwingungsantwort für vier verschiedene Lösungen aus **Bild 7.17**; a)–c) Resonanzen und Schnittpunkt der Amplitudengänge von A- und B-Schwinger in **Bild 7.17 a)** bei  $\Omega_I, \Omega_{II}, \Omega_{III}$ ; d) Resonanz in **Bild 7.17 g)** bei  $\Omega_{IV}$

B-Schwingers. Diese durch die Verstimmung der benachbarten Schwinger entstehende unterschiedliche Bewegung benachbarter Reibelemente ist mit identischen Schwingern nicht möglich. **Bild 7.18 d)** zeigt die Schwingungsantwort des lokalen Maximums der Dämpfungsoptimierung, vgl. **Bild 7.17 g)**. Der Phasenversatz in Resonanz von  $36^\circ$  bedeutet, dass zwischen B-Schwinger und dem A-Schwinger des Folgesegments kein Phasenversatz vorliegt. Das zweite Reibelement kann damit keine Energie dissipieren und bewegt sich synchron mit den Kontaktpartnern.

Eine relative Kopplung mit  $\kappa_{rel}$  wirkt sich durch eine Reduktion der Verstimmung nachteilig auf die Dämpfungsleistung aus. Für  $\kappa_{rel} = 0.05$  und  $\kappa_{rel} = 0.1$  ist die Systemantwort mit Verstimmung in **Bild 7.19** dargestellt. Das Systemverhalten nähert sich der unverstimmten Systemantwort an, was auch die überlagerten Kurven für die Dämpfungsoptimierung in **Bild 7.20** zeigen. Für den hier beobachteten Effekt der verbesserten Dämpfungsleistung durch Verstimmung ist daher eine möglichst geringe Scheibenkopplung



**Bild 7.19:** Schwingungsantworten des mit  $\kappa_{ver} = 0.1$  verstimmten Systems mit Reibelementkontakt und Relativkopplung; a) Relative Kopplung mit  $\kappa_{rel} = 0.05$  b) Relative Kopplung mit  $\kappa_{rel} = 0.1$



**Bild 7.20:** Vergleich der Dämpfungsoptimierungskurven des unverstimmten Systems mit den mit  $\kappa_{\text{rel}} = 0.05$  und  $\kappa_{\text{rel}} = 0.1$  verstimmten Systemen der zyklischen Struktur erforderlich.

## 8 Diskussion der erzielten Ergebnisse

### **Strukturmodellierung**

Unter Ausnutzung der zyklischen Symmetrie konnten die aus geschlossenen Schwingerketten bestehenden Minimalmodelle auf ein sich wiederholendes Segment mit komplexen Randbedingungen reduziert werden. Für quantitative Analysen eignen sich die gewählten Mehrmassenmodelle nur bedingt. Im Vergleich mit dem Finite Elemente Modell einer realistischen Schaufelkranzstruktur wurde jedoch gezeigt, dass sich das Systemverhalten der vereinfachten Modelle an eine Schaufeleigenform anpassen lässt. Damit sind auch die Grenzen der Strukturmodellierung aufgezeigt, die keine Interaktion zwischen verschiedenen Schwingungsformen der Schaufelblattgeometrie zulassen. Der entscheidende Vorteil der einfachen Modelle ergibt sich schließlich aus der Möglichkeit Zusammenhänge nachvollziehbar aufzuzeigen. So konnte ein analytischer Ausdruck entwickelt werden, der die Eigenvektoren der alternierend verstimmten Schwinger ins Verhältnis zueinander setzt. Die negative Auswirkung einer linearen Relativkopplung auf die alternierende Verstimmung konnte aus der analytischen Beschreibung direkt abgelesen und in den numerischen Untersuchungen mit Reibungsdämpfung nachvollzogen werden.

### **Lineare Systemantwort bei alternierender Verstimmung**

Die Anregung von Schaufelkränzen in Strömungsmaschinen ist überwiegend durch die Fluid-Struktur-Interaktion verursacht. Instabile Bereiche strömungsinduzierter Schwingungen wurden nicht behandelt. Für den in dieser Arbeit berücksichtigten Anregungsmechanismus der Düsenanregung wurden äußere Kräfte an der zyklischen Struktur durch eine idealisierte umlaufende Anregung modelliert. Jedes Segment ist dabei mit einer harmonischen Kraft als Näherung für die Druckverteilung der vorgeschalteten Statorschaufelreihe beaufschlagt. Diese Vereinfachung ermöglicht die Beschreibung der Anregung durch sogenannte Erregerordnungen und wird verbreitet bei der dynamischen Analyse von Schaufelkränzen angewendet. Ausgehend von der Orthogonalitätsbedingung für unverstimmte Systeme wurde die Anregbarkeit der Schwingungsformen des alternierend verstimmten Modells überprüft. Die anregbaren Eigenformen wurden anschaulich in eine Schwingungsform mit Betrag des Phasenwinkels zwischen  $0^\circ$  und  $90^\circ$  und eine zweite um  $180^\circ$  versetzte Schwingungsform getrennt. Der Betrag des Phasenversatzes zwischen benachbarten Schwingern in der zweiten Eigenform entspricht einem Wert zwischen  $90^\circ$  und  $180^\circ$ . Es wurde gezeigt, dass je nach Erregerordnung und Schaufel-, bzw. Schwingerzahl primär eine der beiden Eigenformen angeregt wird und

die jeweils Andere nur bei alternierender Verstimmung anregbar ist. Neben der Erregerordnung ist die Systemantwort im linearen Fall durch die Wahl der Dämpfung bestimmt. In der Bewertung des Stands der Technik wurde die gängige Proportionaldämpfung aufgrund ihrer Frequenzabhängigkeit als ungeeignet für Systemanalysen mit Frequenzverstimmung eingestuft. Es wurden von der Verstimmung unabhängige modale Dämpfungsgrade gewählt und die Amplitudengänge der linearen Struktur mit alternierender Verstimmung analysiert. Für zwei verschiedene Erregerordnungen, welche jeweils eine der beiden anregbaren Eigenformen primär anregen, wurden Schwingungsantworten ermittelt. Es konnte festgestellt werden, dass die Resonanzüberhöhung mindestens eines Schwingers bei Variation der alternierenden Frequenzverstimmung immer höher ist, als im unverstimmten Referenzfall. Das Minimalmodell mit konstanten modalen Dämpfungsgraden stellt damit eine ideale Basis für nichtlineare Schwingungsanalysen dar, bei denen eine Reduktion der Resonanzüberhöhung bei alternierender Verstimmung eindeutig Effekten der Reibungsdämpfung zugeordnet werden können.

### **Reibelement- und Kontaktmodellierung**

Aufgrund fehlender Nachgiebigkeit des Strukturmodells in der Kontaktzone wurde eine Penalty-Regularisierung des Kontaktproblems verwendet. Die Kontaktgesetze wurden damit nicht exakt eingehalten. Mit dem Kontaktmodell an der Feder-Masse-Struktur konnte jedoch die charakteristische Systemdynamik reibungsgedämpfter Systeme mit Frequenzverschiebung der Resonanz abgebildet werden. Es wurde gezeigt, dass das dynamische Verhalten des Modells aus dem Zusammenspiel der System- und Kontaktparameter folgt. Die verwendeten Modelle konnten die Versteifung einer Schaufelreihe durch Reibelemente abbilden. Die Steifigkeiten der Kontaktmodelle sind an einen Frequenzunterschied der linearen Grenzfälle für den freien und den vollständig haftenden Kontakt anzupassen und nicht als physikalische Kontaktsteifigkeiten zu interpretieren. Die Penaltysteifigkeiten wurden daher an die Struktursteifigkeit angepasst. Eine reale Struktur lässt sich abbilden, sofern die freie und die durch den Reibkontakt versteifte Schwingung der Schaufel die gleiche Schwingungsform aufweisen. Die Vernachlässigung der Starrkörperrotation des keilförmigen Reibkörpers verhinderte das Abrollen und Verkanten im Kontakt. In der Modellierung wurden zudem perfekte Winkel von Schwingerplattform und Reibkörper angenommen. Ein Punktkontaktmodell war mit diesen Vereinfachungen ausreichend für jede Kontaktpaarung unabhängig von der geometrischen Ausdehnung der Kontaktpartner. Beobachtete Effekte konnten somit auf die Reibungsdämpfung zurückgeführt werden.

### **Alternierend verstimmte Systeme mit Reibungskopplung**

Im Bereich der Turbomaschinen wurden die Themengebiete der bewussten alternierenden Verstimmung und der Reibungskopplung zwischen benachbarten Schaufeln bereits in vielen wissenschaftlichen Publikationen separat behandelt. In der Praxis dienen diese Methoden der Stabilisierung und Dämpfung von schwingungsanfälligen Stufen einer Strömungsmaschine. Bisher existieren nur wenige Arbeiten, die eine Kombination aus alternierender Anordnung verstimmter Schaufeln mit Reibkontakten oder Reibelemen-

ten im Schaufelfußbereich behandeln. In der vorliegenden Arbeit wurde das dynamische Verhalten von zyklischen Strukturen unter dem Einfluss der kombinierten Verstimmung und Reibungsdämpfung untersucht. Es konnte gezeigt werden, dass eine alternierende Verstimmung die Dämpfungsleistung von Reibelementen deutlich steigern kann. Notwendig hierfür ist eine Anregung mit einem Phasenversatz im Bereich  $0 \leq \Delta\varphi \leq 90^\circ$ , bei dem primär die erste Schwingungsform des verstimmtten zyklischen Segments angeregt wird. Es wurden Dämpfungsoptimierungskurven aus Simulationsergebnissen erzeugt, die durch zwei lokale Minima geprägt sind.

Die alternierende Verstimmung führte in einem weiten Bereich der Variation der Kontaktnormalkraft, bzw. Fliehkraft bei Reibelementkopplung, zu einer verbesserten Dämpfungswirkung. Der Grund konnte einer besseren Reibungsdämpfung der zusätzlich angeregten zweiten Schwingungsform zugeordnet werden. Eine alternierend verstimmtte Schaufelreihe kann somit durch Reibkontakte zusätzlich stabilisiert werden. Darüber hinaus lässt sich die Reibungsdämpfung eines Schaufelkranzes durch eine alternierende Frequenzverstimmung gezielt steigern. Wichtigste Voraussetzungen für diesen positiven Effekt auf die Dämpfungswirkung sind ein geringer Scheibeneinfluss, weil die relative Steifigkeit der Verstimmung direkt entgegenwirkt, und ein Verhältnis von Erregerordnung zu Schaufelzahl, sodass primär eine Schwingungsform der zyklischen Struktur mit Phasenversatz  $0 \leq \Delta\varphi \leq 90^\circ$  angeregt wird. Der Reibkontakt wirkt für hohe Kontaktnormalkräfte zunehmend wie eine Feder ohne Dämpfungswirkung und hat damit den gleichen negativen Einfluss auf die alternierende Verstimmung, wie eine relative lineare Kopplung zwischen benachbarten Schwingern. Das Systemverhalten nähert sich daher mit zunehmender Zentrifugalkraft bei Reibelementen dem unverstimmtten System mit konstantem Phasenversatz zwischen den Schwingern an.

## 9 Zusammenfassung

Schaufelkränze in Strömungsmaschinen sind schwingungsfähige Strukturen, die durch das umströmende Fluid zu Schwingungen angeregt werden können. Die Anregung lässt sich in selbsterregte Schwingungen mit charakteristischen kritischen Strömungsgeschwindigkeiten und fremderregte Schwingungen unterteilen. Strömungsinduzierte selbsterregte Schwingungen werden allgemein als Flattern bezeichnet und können in Form einer negativen Dämpfung bei Strukturschwingungen interpretiert werden. Die Fremderregung von Schaufelkränzen, die beispielsweise durch die inhomogene Anströmung der Rotorschaukeln verursacht wird, ist hingegen eine von der Drehzahl des Rotors abhängige Form der Anregung, deren Charakteristik durch die Statorschaufeln bestimmt wird. Um den sicheren Betrieb einer Turbine oder eines Verdichters zu gewährleisten haben sich Maßnahmen zur Stabilisierung der rotierenden Strukturen hinsichtlich ihrer Schwingungsanfälligkeit bewährt. Flatterinstabilitäten lassen sich durch eine bewusste Verstimmung der Schaufeln in einem Kranz reduzieren, sofern es sich um eine Frequenzverstimmung handelt. Zusätzlich kann die Dämpfung des Systems aus Scheibe und Schaufeln durch das Einbringen von Reibkontakten erhöht werden. Üblich sind Reibelemente im Schaufelfußbereich, die durch Fliehkräfte an die Schaufeln gepresst werden und durch die Relativbewegung zwischen benachbarten Schaufeln Schwingungsenergie in Wärme umwandeln.

In dieser Arbeit wurde das Schwingungsverhalten von Schaufelkränzen mit Reibelementkopplung und alternierender Frequenzverstimmung der Schaufeln untersucht. Die alternierende Verstimmung wird zur Erhöhung der aerodynamischen Dämpfung von flattergefährdeten Schwingungsformen angewendet. Ebenso ist die nichtlineare Dynamik von zyklisch geschlossenen Schaufelkränzen mit Reibkontakten zur Schwingungsdämpfung in zahlreichen Forschungsergebnissen dokumentiert und wird in der Praxis eingesetzt. Mit dieser Arbeit wurde die bisher wenig behandelte Kombination aus bewusster alternierender Verstimmung und nichtlinearer Kopplung durch Reibelemente untersucht und das Potential, sowie Grenzen der Wechselwirkungen aufgezeigt. Die sich aus dem Zusammenhang ergebenden offenen Fragen wurden aus zwei Blickwinkeln formuliert. Zum einen wurde das Problem der optimalen Auslegung von Reibelementen für einen bereits alternierend verstimmtten Schaufelkranz betrachtet. Zum anderen wurde die Frage nach dem Einfluss einer, aus strömungstechnischer Sicht zwar nicht notwendigen, unter strukturmechanischen Aspekten jedoch möglicherweise vorteilhaften, alternierenden

Verstimmung der Schaufeln auf die Dämpfungswirkung von Reibelementen beantwortet.

Das Ziel der Untersuchungen war eine möglichst einfache Darstellung des nichtlinearen Systemverhaltens. Nach dem Vorbild grundsteinlegender wissenschaftlicher Veröffentlichungen auf dem Gebiet reibungsgedämpfter Schaufelkranzschwingungen wurden in dieser Arbeit Minimalmodelle mit geringer Komplexität entwickelt. Für die Behandlung eines alternierend verstimmten Schaufelkranzes wurde ein Ersatzmodell, bestehend aus einem zyklischen Segment mit zwei Einmassenschwingern und komplexen Randbedingungen, verwendet. Dieses Modell eignet sich nur bedingt für quantitative Analysen von Schaufelkränzen, kann jedoch Aufschluss über das dynamische Verhalten verstimmter Systeme liefern. Zunächst wurde das lineare System ohne Reibung analysiert. Mit Hilfe des vereinfachten Modells war es möglich einen analytischen Ausdruck zu entwickeln, der das Maß der Verstimmung der komplexen Eigenvektoren des Segments beschreibt. Eine relative Kopplung durch eine lineare Feder diente der Abbildung einer Nachgiebigkeit durch die Scheibenstruktur des Schaufelkranzes. Die Eigenwertanalyse des linearen System zeigte, dass eine relative Kopplung benachbarter Schwinger der Verstimmung der Eigenvektoren direkt entgegenwirkt.

Als einzige äußere Anregung wurde eine Fremderregung angenommen, die auch als Düsenanregung bekannt ist und eine wichtige Form der Schwingungsanregung in Strömungsmaschinen darstellt. Die Schwingungsantwort des linearen Modells ist durch die anregbaren Eigenformen und den Dämpfungsgrad dieser Eigenformen geprägt. Mit einer Erweiterung der Orthogonalitätsbedingung für unverstimmte zyklische Strukturen wurde die Anregbarkeit der komplexen Eigenformen des verstimmten Minimalmodells nachgewiesen. Zur Veranschaulichung wurden die Eigenformen nach dem Betrag der Phasenversatzes zwischen benachbarten Schwingern getrennt. Die erste Eigenform weist dabei einen Phasenversatz zwischen  $0^\circ$  und  $90^\circ$  auf und die Zweite liegt in ihrem Betrag zwischen  $90^\circ$  und  $180^\circ$ . Durch eine Erregerordnung wird primär eine der beiden Schwingungsformen des Minimalmodells angeregt. Bei alternierender Verstimmung kann zusätzlich die zweite Eigenform des zyklischen Systems angeregt werden. Zur Dämpfung der linearen Struktur wurden modale Dämpfungsgrade gewählt, die sich aufgrund ihrer Frequenzunabhängigkeit besonders für die dynamische Analyse von Systemen mit Verstimmung der Eigenfrequenzen eignen. Die Schwingungsantworten des reibungsfreien Systems zeigten unabhängig von der Erregerordnung immer zumindest bei einem der beiden Schwinger eine erhöhte Resonanzamplitude gegenüber der unverstimmten Antwort. Eine Amplitudenreduktion beider Schwinger konnte so eindeutig auf die Reibungsdämpfung zurückgeführt werden und war nicht durch die Dynamik der linearen Struktur begründet.

Das Minimalmodell wurde anschließend ohne Verstimmung mit COULOMB-schem Reibkontakt versehen und mit der Harmonischen Balance Methode näherungsweise gelöst. Ziel war es den Einfluss der Schwingungsform, bzw. des Phasenversatzes zwischen den Schwingern, auf die Dämpfungswirkung zu ermitteln. Die Harmonische Balance lie-



ferte eine komplexe algebraische Gleichung zur Bestimmung der harmonisch angenäherten Systemantwort. Die komplexe Gleichung konnte analytisch gelöst werden, was einen Einblick in die Dynamik reibungsgedämpfter Schwingungen bei zyklischen Strukturen ermöglichte. Es konnte gezeigt werden, dass die Dämpfungswirkung der Schwingungsformen mit dem Phasenversatz anwächst, bis ein Maximum bei gegenphasiger Schwingung erreicht wird. Das Elasto-Gleit-Kontaktmodell mit zusätzlicher Nachgiebigkeit wurde anschließend beschrieben und die von den Kontaktkräften und Relativverschiebungen abhängigen Steifigkeit- und der Dämpfungseigenschaften qualitativ dargestellt. Über die Beschreibung des dynamischen Kontakts hinaus wurde gezeigt, dass die algebraische Ersatzgleichung für reibungsgedämpfte Systeme nicht komplex differenzierbar ist und für die Anwendung des NEWTON-Verfahrens zur Lösung in Real- und Imaginärteil zerlegt werden muss.

Mit dem Verständnis des Schwingungsverhaltens der alternierend verstimmten Struktur und dem Zusammenhang von Reibungsdämpfungswirkung und zyklischer Schwingungsform wurde schließlich das nichtlineare Systemverhalten numerisch untersucht. Die Systemgleichung wurde ausgehend von einem Basiselement für das zyklische Gesamtsystem entwickelt und der Reibelementkontakt in zwei Modellierungsstufen in das Minimalmodell integriert. Zunächst wurden Elasto-Gleit-Kontaktmodelle zwischen jeweils zwei Schwingern mit von der Bewegung unabhängiger Kontaktnormalkraft verwendet. Aus den Relativbewegungen der Schwinger wurden mit der AFT-Methode (*alternating frequency time method*) Kontaktkräfte im Zeitbereich ermittelt und über die Fouriertransformation in Form ihrer harmonischen Koeffizienten in die Bewegungsgleichung zurückgeführt. Die Systemgleichung wurde mit dem NEWTON-Verfahren in dem gewählten Frequenzbereich der Anregung gelöst. Die Kontaktelemente konnten den dynamischen Einfluss von Reibelementen mit Frequenzverschiebung der Resonanz und Dämpfungswirkung nachbilden. In einem zweiten Schritt wurden die Reibelemente als separate Starrkörper mit zwei translatorischen Freiheitsgraden modelliert. Die Starrkörperrotation wurde vernachlässigt, um ein von den geometrischen Abmessungen der Kontaktpartner unabhängiges Verhalten des nichtlinearen Systems zu gewährleisten. Die Kontaktkräfte wurden ebenfalls mit der AFT-Methode bestimmt, wobei die Normalkraft im Kontakt aufgrund der Bewegung der Reibelemente veränderlich war. Unter Variation der Kontaktnormalkraft, bzw. der Fliehkraft bei Reibelementkontakt, wurden Schwingungsantworten bestimmt und analysiert. Sowohl für den Elasto-Gleit-Kontakt, als auch bei der Verwendung separater Reibkörper konnte ein charakteristischer Verlauf der Dämpfungsoptimierungskurve mit zwei lokalen Minima festgestellt werden. Bei einer Anregung mit einem Phasenwinkel im Bereich zwischen  $0^\circ$  und  $90^\circ$  konnte eine verbesserte Dämpfungswirkung durch alternierende Verstimmung mit deutlich niedrigeren Amplituden gegenüber der optimalen Reibungsdämpfung des unverstimmten Systems gefunden werden. Die relative Kopplung zur Berücksichtigung der Scheibendynamik hatte einen negativen Einfluss auf die verbesserte Dämpfungswirkung, was bereits in dem analytischen Modalanalyseergebnis abgelesen werden konnte. Mit Erhöhung der Kontaktnormalkräfte nähert sich das verstimmte System dem unverstimmten Referenzsystem

an, was auf den versteifenden Einfluss des Kontakts zurückzuführen ist. Bei vorwiegend haftendem Kontakt wirken die Kontaktelemente wie Federn und haben den gleichen negativen Einfluss auf die Verstimmung, wie eine Relativkopplung. Es zeigte sich dennoch zumindest in Resonanz über einen weiten Bereich der Zentrifugalkraft bei Reibelementen eine bessere Energiedissipation. Die durch alternierende Verstimmung zusätzlich eingekoppelte Schwingungsform weist dabei ein höheres Dämpfungsvermögen auf, sodass alternierend verstimmte Systeme effektiv und über einen weiten Frequenzbereich durch Reibelemente gedämpft werden können. Überdies ist eine Verbesserung der Reibungsdämpfung aufgrund zusätzlicher alternierender Verstimmung möglich, durch die eine bei geringen Phasenwinkeln begrenzte Dämpfungswirkung von Reibelementen deutlich gesteigert werden kann.

## A Eigenwerte des alternierend verstimmtten Minimalmodells

Die Systemgleichung für das Parameterbeispiel aus Gl. (5.22) in Abschnitt 5.2 lautet

$$\begin{bmatrix} (1 - \kappa_{\text{ver}} + 2\kappa_{\text{rel}})c - \omega^2 m & -\kappa_{\text{rel}}(1 + e^{-i2\Delta\tilde{\varphi}})c \\ -\kappa_{\text{rel}}(1 + e^{+i2\Delta\tilde{\varphi}})c & (1 + \kappa_{\text{ver}} + 2\kappa_{\text{rel}})c - \omega^2 m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_A \\ \hat{x}_B \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{A.1})$$

und beschreibt das Standardeigenwertproblem in der Form

$$A(\omega^2)\mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (\text{A.2})$$

Nichttriviale Lösungen ergeben sich für Werte von  $\omega$ , die zu einer Singularität der Koeffizientenmatrix  $A$  führen. Die Determinante ist in diesem Fall gleich Null und es folgt die charakteristische Gleichung zur Berechnung der Eigenwerte

$$\begin{aligned} & \left( (1 - \kappa_{\text{ver}} + 2\kappa_{\text{rel}})c - \omega^2 m \right) \left( (1 + \kappa_{\text{ver}} + 2\kappa_{\text{rel}})c - \omega^2 m \right) \dots \\ & \dots - \kappa_{\text{rel}}^2 c^2 (1 + e^{+i2\Delta\tilde{\varphi}})(1 + e^{-i2\Delta\tilde{\varphi}}) \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \left( (1 + 2\kappa_{\text{rel}})^2 - \kappa_{\text{ver}}^2 \right) c^2 - 2\omega^2 m c (1 + 2\kappa_{\text{rel}}) + \omega^4 m^2 \dots \\ & \dots - \kappa_{\text{rel}}^2 c^2 (2 + e^{+i2\Delta\tilde{\varphi}} + e^{-i2\Delta\tilde{\varphi}}) \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Die komplexen Zeiger in der letzten Klammer überlagern sich zu der reellen Kosinusfunktion  $e^{+i2\Delta\tilde{\varphi}} + e^{-i2\Delta\tilde{\varphi}} = 2 \cos 2\Delta\tilde{\varphi}$ . Über den Zusammenhang  $1 + \cos(2\Delta\tilde{\varphi}) = 2 \cos^2(\Delta\tilde{\varphi})$  kann der entstehende Klammerausdruck vereinfacht werden und es folgt

$$\Leftrightarrow \omega^4 - 2\frac{c}{m}(1 + 2\kappa_{\text{rel}})\omega^2 + \frac{c^2}{m^2} \left( (1 + 2\kappa_{\text{rel}})^2 - \kappa_{\text{ver}}^2 - 4\kappa_{\text{rel}}^2 \cos^2 \Delta\tilde{\varphi} \right) \stackrel{!}{=} 0. \quad (\text{A.5})$$

Gl. (A.5) ist die Normalform einer quadratischen Gleichung mit den beiden Lösungen

$$\omega_{1/2}^2 = \frac{c}{m}(1 + 2\kappa_{\text{rel}}) \pm \frac{c}{m} \sqrt{\kappa_{\text{ver}}^2 + 4\kappa_{\text{rel}}^2 \cos^2 \Delta\tilde{\varphi}}, \quad (\text{A.6})$$

welche die quadrierten Eigenwerte des verstimmten Systems darstellen. Zur Berechnung der Eigenvektoren werden die Eigenwerte jeweils in die Systemgleichung Gl. (A.1) eingesetzt. Die zwei Zeilen der beschreibenden Gleichung sind nach Einsetzen eines Eigenwerts linear abhängig und es reicht aus eine Zeile zur Berechnung des zugehörigen Eigenvektors zu verwenden. Die erste Zeile von Gl. (A.1) für den ersten Eigenvektor lautet

$$c \left[ 1 - \kappa_{\text{ver}} + 2\kappa_{\text{rel}} - \left( 1 + 2\kappa_{\text{rel}} - \sqrt{\kappa_{\text{ver}}^2 + 4\kappa_{\text{rel}}^2 \cos^2 \Delta\tilde{\varphi}} \right) \right] \hat{x}_A \dots$$

$$\dots - \kappa_{\text{rel}} c (1 + e^{-i2\Delta\tilde{\varphi}}) \hat{x}_B = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$\Leftrightarrow \left[ -\kappa_{\text{ver}} + \sqrt{\kappa_{\text{ver}}^2 + 4\kappa_{\text{rel}}^2 \cos^2 \Delta\tilde{\varphi}} \right] \hat{x}_A - \kappa_{\text{rel}} (1 + e^{-i2\Delta\tilde{\varphi}}) \hat{x}_B = 0. \quad (\text{A.8})$$

Mit zwei Unbekannten für eine Zeile der Systemgleichung ist die Länge des Eigenvektors frei wählbar. Für eine gute Vergleichbarkeit der Ergebnisse des Minimalbeispiels mit den Resultaten der Finite Elemente Analyse in Abschnitt 5.2 wird die Normierung an die Verstimmung angepasst. Ausgehend von positiven Werten der Steifigkeitsverstimmung  $\kappa_{\text{ver}} > 0$  wird der Schwinger B steifer sein. Das bedeutet, dass bei der niedrigeren der beiden Eigenfrequenzen Schwinger A einen stärkeren Schwingungsausgang aufweist, als Schwinger B. Bei der höheren Eigenfrequenz schwingt entsprechend Schwinger B stärker, als Schwinger A. Die Eigenvektoren werden aus diesem Grund auf den dominanten Schwinger normiert. Für  $\omega_1$  folgt mit  $\hat{x}_A = 1$

$$\hat{x}_B = \frac{\sqrt{\left(\frac{\kappa_{\text{ver}}}{\kappa_{\text{rel}}}\right)^2 + 4 \cos^2 \Delta\tilde{\varphi}} - \frac{\kappa_{\text{ver}}}{\kappa_{\text{rel}}}}{(1 + e^{-i2\Delta\tilde{\varphi}})}. \quad (\text{A.9})$$

Die Amplitude des zweiten Schwingers ist eine komplexe Zahl, die mit Hilfe der folgenden Erweiterung in eine anschaulichere Form gebracht werden kann

$$\hat{x}_B = \frac{\sqrt{\left(\frac{\kappa_{\text{ver}}}{\kappa_{\text{rel}}}\right)^2 + 4 \cos^2 \Delta\tilde{\varphi}} - \frac{\kappa_{\text{ver}}}{\kappa_{\text{rel}}}}{(1 + e^{-i2\Delta\tilde{\varphi}})} \frac{e^{i\Delta\tilde{\varphi}}}{e^{i\Delta\tilde{\varphi}}} \quad (\text{A.10})$$

$$\Leftrightarrow \hat{x}_B = \frac{\sqrt{\left(\frac{\kappa_{\text{ver}}}{\kappa_{\text{rel}}}\right)^2 + 4 \cos^2 \Delta\tilde{\varphi}} - \frac{\kappa_{\text{ver}}}{\kappa_{\text{rel}}}}{(e^{i\Delta\tilde{\varphi}} + e^{-i\Delta\tilde{\varphi}})} e^{i\Delta\tilde{\varphi}} \quad (\text{A.11})$$

$$\Leftrightarrow \hat{x}_B = \frac{\sqrt{\left(\frac{\kappa_{\text{ver}}}{\kappa_{\text{rel}}}\right)^2 + 4 \cos^2 \Delta\tilde{\varphi}} - \frac{\kappa_{\text{ver}}}{\kappa_{\text{rel}}}}{2 \cos \Delta\tilde{\varphi}} e^{i\Delta\tilde{\varphi}}. \quad (\text{A.12})$$

Gl. (A.12) ist eine komplexe e-Funktion mit reellem Vorfaktor, welcher das Verhältnis der

beiden Schwingungsamplituden beschreibt. Dieser Verhältnissfaktor wird aus Gründen der Übersichtlichkeit durch die Größe  $\alpha$  abgekürzt

$$\alpha(\kappa_{\text{ver}}, \kappa_{\text{rel}}, \Delta\tilde{\varphi}) = \frac{\sqrt{\left(\frac{\kappa_{\text{ver}}}{\kappa_{\text{rel}}}\right)^2 + 4 \cos^2 \Delta\tilde{\varphi}} - \frac{\kappa_{\text{ver}}}{\kappa_{\text{rel}}}}{2 \cos \Delta\tilde{\varphi}}. \quad (\text{A.13})$$

Der zweite Eigenvektor des verstimmtten Systems für  $\omega_2$  folgt analog durch Einsetzen in das Ausgangsgleichungssystem. Betrachtung der zweiten Zeile von Gl. (A.1) ergibt

$$\begin{aligned} & -\kappa_{\text{rel}}c(1 + e^{+i2\Delta\tilde{\varphi}})\underline{\hat{x}}_A \dots \\ \dots + c \left[ 1 + \kappa_{\text{ver}} + 2\kappa_{\text{rel}} - \left( 1 + 2\kappa_{\text{rel}} + \sqrt{\kappa_{\text{ver}}^2 + 4\kappa_{\text{rel}}^2 \cos^2 \Delta\tilde{\varphi}} \right) \right] \underline{\hat{x}}_B = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$$\Leftrightarrow -\kappa_{\text{rel}}(1 + e^{+i2\Delta\tilde{\varphi}})\underline{\hat{x}}_A + \left[ \kappa_{\text{ver}} - \sqrt{\kappa_{\text{ver}}^2 + 4\kappa_{\text{rel}}^2 \cos^2 \Delta\tilde{\varphi}} \right] \underline{\hat{x}}_B = 0. \quad (\text{A.15})$$

Eine Normierung auf den dominanten Schwinger dieser Eigenform mit  $\underline{\hat{x}}_B = 1$  liefert für  $\underline{\hat{x}}_A$  den Ausdruck

$$\underline{\hat{x}}_A = -\frac{\sqrt{\left(\frac{\kappa_{\text{ver}}}{\kappa_{\text{rel}}}\right)^2 + 4 \cos^2 \Delta\tilde{\varphi}} - \frac{\kappa_{\text{ver}}}{\kappa_{\text{rel}}}}{(1 + e^{+i2\Delta\tilde{\varphi}})}, \quad (\text{A.16})$$

welcher ebenfalls über eine Erweiterung mit komplexwertigen e-Funktionen in eine anschaulichere Form überführt werden kann

$$\underline{\hat{x}}_A = -\frac{\sqrt{\left(\frac{\kappa_{\text{ver}}}{\kappa_{\text{rel}}}\right)^2 + 4 \cos^2 \Delta\tilde{\varphi}} - \frac{\kappa_{\text{ver}}}{\kappa_{\text{rel}}}}{(1 + e^{i2\Delta\tilde{\varphi}})} \frac{e^{-i\Delta\tilde{\varphi}}}{e^{-i\Delta\tilde{\varphi}}} \quad (\text{A.17})$$

$$\Leftrightarrow \underline{\hat{x}}_A = -\frac{\sqrt{\left(\frac{\kappa_{\text{ver}}}{\kappa_{\text{rel}}}\right)^2 + 4 \cos^2 \Delta\tilde{\varphi}} - \frac{\kappa_{\text{ver}}}{\kappa_{\text{rel}}}}{(e^{-i\Delta\tilde{\varphi}} + e^{i\Delta\tilde{\varphi}})} e^{-i\Delta\tilde{\varphi}} \quad (\text{A.18})$$

$$\Leftrightarrow \underline{\hat{x}}_A = -\frac{\sqrt{\left(\frac{\kappa_{\text{ver}}}{\kappa_{\text{rel}}}\right)^2 + 4 \cos^2 \Delta\tilde{\varphi}} - \frac{\kappa_{\text{ver}}}{\kappa_{\text{rel}}}}{2 \cos \Delta\tilde{\varphi}} e^{-i\Delta\tilde{\varphi}} \quad (\text{A.19})$$

$$\Leftrightarrow \underline{\hat{x}}_A = -\alpha e^{-i\Delta\tilde{\varphi}}. \quad (\text{A.20})$$

Die beiden komplexen Eigenvektoren des verstimmtten und gekoppelten Systems lauten zusammengefasst

$$\boldsymbol{\phi}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha e^{i\Delta\tilde{\varphi}} \end{bmatrix} ; \boldsymbol{\phi}_2 = \begin{bmatrix} -\alpha e^{-i\Delta\tilde{\varphi}} \\ 1 \end{bmatrix} . \quad (\text{A.21})$$

## B Grenzwertbestimmung des Verhältnisfaktors der Eigenvektoren

In Abschnitt 5.2 wird der Faktor  $\alpha$  aus Gl. (5.25), bzw. Gl. (A.13) in **Bild 5.7** graphisch dargestellt. Die Wertebereiche der Darstellung enthalten mit  $\cos \Delta\tilde{\varphi} = 0$  einen Lösungsbereich, der zu einem unbestimmten Ausdruck der Form  $\frac{0}{0}$  führt. Mit Hilfe der Regel von DE L'HOSPITAL [83, S. 100] lässt sich der Grenzwert dieses unbestimmten Ausdrucks über den Grenzwert der Ableitungen berechnen

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (\text{B.1})$$

Für  $x_\alpha = \cos \Delta\tilde{\varphi}$  wird die Regel nach Gl. (B.1) überprüft und der Grenzwert berechnet

$$\lim_{x_\alpha \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\left(\frac{\kappa_{\text{ver}}}{\kappa_{\text{rel}}}\right)^2 + 4x_\alpha^2} - \frac{\kappa_{\text{ver}}}{\kappa_{\text{rel}}}}{2x_\alpha} = \lim_{x_\alpha \rightarrow 0} \frac{f_\alpha(x_\alpha)}{g_\alpha(x_\alpha)} = \frac{0}{0}. \quad (\text{B.2})$$

Die Ableitungen lauten

$$f'_\alpha(x_\alpha) = \frac{\partial f_\alpha(x_\alpha)}{\partial x_\alpha} = \frac{4x_\alpha}{\sqrt{\left(\frac{\kappa_{\text{ver}}}{\kappa_{\text{rel}}}\right)^2 + 4x_\alpha^2}} \quad (\text{B.3})$$

und

$$g'_\alpha(x_\alpha) = \frac{\partial g_\alpha(x_\alpha)}{\partial x_\alpha} = 2. \quad (\text{B.4})$$

Die Anwendung der Regel von DE L'HOSPITAL führt auf den Grenzwert

$$\lim_{x_\alpha \rightarrow 0} \frac{f_\alpha(x_\alpha)}{g_\alpha(x_\alpha)} = \lim_{x_\alpha \rightarrow 0} \frac{f'_\alpha(x_\alpha)}{g'_\alpha(x_\alpha)} = 0. \quad (\text{B.5})$$

Wird  $x_\alpha$  Null, das bedeutet  $\cos \Delta\tilde{\varphi}$  wird Null, so nimmt die Funktion  $\alpha$  ebenfalls den Wert Null an.

## C Überprüfung der komplexen Differenzierbarkeit

Im Folgenden wird die komplexe Differenzierbarkeit einer Funktion erläutert. Die CAUCHY-RIEMANN Differentialgleichungen und ihre Bedeutung für die Eigenschaften komplexer Zahlen werden beschrieben und zählen zu den Grundlagen der Funktionentheorie. Die nachfolgend aufgeführten Erklärungen orientieren sich an den Fachbüchern über Funktionentheorie von JÄNICH [37], sowie FREITAG & BUSAM [28].

Wenn eine Funktion im Komplexen  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  in einem Punkt  $z_0 \in U$  komplex differenzierbar ist, dann existiert die Ableitung analog zu der Definition der reellen Differenzierbarkeit

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \quad (\text{C.1})$$

Damit kann eine lineare Abbildung  $A : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit im Bezugspunkt  $z_0$  verschwindendem Rest  $r(\Delta z)$  formuliert werden

$$f(z_0 + \Delta z) = f(z_0) + A\Delta z + r(\Delta z). \quad (\text{C.2})$$

Die Abbildung entspricht dann der Ableitung an der Stelle  $z_0$  und es gilt

$$A = f'(z_0). \quad (\text{C.3})$$

Komplexe Zahlen lassen sich über den Isomorphismus

$$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \quad (\text{C.4})$$

$$x + iy \cong \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (\text{C.5})$$

immer in reellen Gleichungen beschreiben. Die lineare Abbildung in Gl. (C.3) ist dann die JACOBI-Abbildung und die zugehörige Matrix wird Jacobimatrix genannt. Die Jacobimatrix  $J$  muss bezüglich der kanonischen Basis (1,i) die Form

$$J = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad (\text{C.6})$$

erfüllen, damit die Matrixmultiplikation im  $\mathbb{R}^2$  der Multiplikation mit einer komplexen



Zahl in  $\mathbb{C}$  entspricht. Für eine komplexe Zahl  $z = x + iy$  folgt

$$(a + ib)(x + iy) \cong \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (\text{C.7})$$

Die Multiplikation in Gl. (C.7) ist eine Selbstabbildung in der komplexen Ebene und beschreibt genau die Drehstreckung. Mit der Polardarstellung  $a + ib = re^{i\varphi}$  und der EULERschen Identität für komplexe Zahlen  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$  wird diese Eigenschaft deutlich

$$J = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}. \quad (\text{C.8})$$

Die Jacobimatrix für eine komplexe Gleichung kann wie für ein Gleichungssystem mit zwei Zeilen im Reellen berechnet werden. Dazu wird die komplexe Funktion in  $f$  nach Realteil  $u$  und Imaginärteil  $v$  getrennt und die Jacobimatrix  $J_{z_0}$  im Punkt  $z_0$  folgt zu

$$f(z = x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (\text{C.9})$$

$$J_{z_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \end{bmatrix}. \quad (\text{C.10})$$

Ein Vergleich mit Gl. (C.6) führt auf die Bedingungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \quad (\text{C.11})$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0). \quad (\text{C.12})$$

Die Gleichungen Gl. (C.11) und Gl. (C.12) sind die CAUCHY-RIEMANN Differentialgleichungen und können zur Überprüfung der komplexen Differenzierbarkeit verwendet werden.

Abschließend wird das unverstimmte Minimalmodell mit COULOMB-scher Reibung, bzw. die reduzierte nichtlineare Gleichung Gl. (6.11) aus Abschnitt 6.1 auf komplexe Differenzierbarkeit überprüft. Wesentliches Merkmal der komplexen Funktion ist der Betrag der Amplitude im Nenner der Reibungsdämpfung. Als Beispiel wird daher folgende Ersatzfunktion mit

$$f(z = x + iy) = \frac{z}{|z|} = \frac{x + iy}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad x^2 + y^2 > 0 \quad (\text{C.13})$$

untersucht. Aufteilung von Real- und Imaginärteil führt auf

$$u(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (\text{C.14})$$

$$v(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (\text{C.15})$$

Die partiellen Ableitungen folgen nach kurzer Rechnung zu

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3} ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-xy}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3} \quad (\text{C.16})$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-xy}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3} ; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x^2}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3} . \quad (\text{C.17})$$

Um die erste CAUCHY-RIEMANN Differentialgleichung zu erfüllen muss  $x = y$  gelten. Die zweite Differentialgleichung ist wegen  $-xy \neq +xy$  für  $x^2 + y^2 > 0$  nicht erfüllbar und  $f$  ist daher in keinen Punkt  $z$  komplex differenzierbar. Damit lässt sich auch allgemein ableiten, dass dynamische Systeme, die im Frequenzbereich eine vergleichbare Amplitudenabhängigkeit besitzen, wie durch die Funktion  $f$  in Gl. (C.13) beschrieben, nicht komplex differenzierbar sind. Eine Nullstellensuche dieser nichtlinearen Gleichung mit dem NEWTON-Verfahren erfordert die Erweiterung auf ein System aus reellen Gleichungen. Es lässt sich hingegen leicht zeigen, dass ein lineares System mit  $f(z) = z$  die Einheitsmatrix als Jacobimatrix liefert und somit überall in der komplexen Ebene komplex differenzierbar ist.

## D Schwingungsantwort des Minimalmodells mit COULOMB-scher Reibung

Die Lösung der Fixpunktaufgabe aus Abschnitt 6.1 ist durch

$$\left( \omega^2 - \Omega_{\text{Er}}^2 + i2D\omega\Omega_{\text{Er}} + i\frac{F_C}{m\hat{x}_j^*} \right) \hat{x}_j^* = \frac{\hat{F}_{\text{Er},j}^*}{m}, \quad (\text{D.1})$$

$$\text{mit } F_C = \frac{8}{\pi} \mu F_N \sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \quad (\text{D.2})$$

beschrieben. Die Schwingungsantwort  $\hat{x}_j^*$  ist eine komplexe Größe und beinhaltet den Real- und Imaginärteil der Lösung. Gl. (D.1) kann in ein System von zwei Gleichungen zur Bestimmung der beiden Lösungsteile umgeformt werden. Alternativ kann das hier vorliegende auf einen Freiheitsgrad reduzierte System in Betrag und Phase in der Form

$$\hat{x}_j^* = \hat{x}_j^* e^{i\vartheta} \quad (\text{D.3})$$

dargestellt werden. Umformen von Gl. (D.1) führt auf

$$\hat{x}_j^* = \frac{\hat{F}_{\text{Er},j}^*}{m} \frac{1}{a + ib} \quad (\text{D.4})$$

mit den Hilfsgrößen

$$a = \omega^2 - \Omega_{\text{Er}}^2 \quad (\text{D.5})$$

$$b = 2D\omega\Omega_{\text{Er}} + \frac{F_C}{m\hat{x}_j^*}. \quad (\text{D.6})$$

Erweitert um den konjugiert komplexen Ausdruck  $a - ib$  folgt aus Gl. (D.4)

$$\hat{x}_j^* = \frac{\hat{F}_{\text{Er},j}^*}{m} \frac{1}{a + ib} \frac{a - ib}{a - ib} \quad (\text{D.7})$$

$$\Leftrightarrow \hat{x}_j^* = \frac{\hat{F}_{\text{Er},j}^*}{m} \frac{1}{a^2 - (ib)^2} a - ib \quad (\text{D.8})$$

$$\Leftrightarrow \hat{x}_j^* = \frac{\hat{F}_{\text{Er},j}^*}{m} \frac{1}{a^2 + b^2} \sqrt{a^2 + b^2} e^{i\arctan(-b/a)} \quad (\text{D.9})$$

$$\Leftrightarrow \hat{x}_j^* = \frac{\hat{F}_{\text{Er},j}^*}{m} \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} e^{i\arctan(-b/a)}. \quad (\text{D.10})$$

Ein Vergleich mit Gl. (D.3) führt auf jeweils eine Bestimmungsgleichung für die Amplitude  $\hat{x}_j^*$  und die Phase  $\vartheta$

$$\hat{x}_j^* = \frac{\hat{F}_{\text{Er},j}^*}{m} \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (\text{D.11})$$

$$\tan \vartheta = -\frac{b}{a}. \quad (\text{D.12})$$

Aus Gl. (D.11) folgt mit Gl. (D.5) und Gl. (D.6) und der Einführung des Frequenzverhältnisses  $\eta = \Omega_{\text{Er}}/\omega$

$$\hat{x}_j^* \sqrt{(1 - \eta^2)^2 + \left(2D\eta + \frac{F_C}{m\omega^2 \hat{x}_j^*}\right)^2} = \frac{\hat{F}_{\text{Er},j}^*}{m\omega^2} \quad (\text{D.13})$$

$$\Leftrightarrow \hat{x}_j^{*2} \left( (1 - \eta^2)^2 + \left(2D\eta + \frac{F_C}{m\omega^2 \hat{x}_j^*}\right)^2 \right) = \frac{\hat{F}_{\text{Er},j}^{*2}}{m^2 \omega^4} \quad (\text{D.14})$$

$$\Leftrightarrow \hat{x}_j^{*2} \left( (1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2 + 4D\eta \frac{F_C}{m\omega^2 \hat{x}_j^*} + \frac{F_C^2}{m^2 \omega^4 \hat{x}_j^{*2}} \right) = \frac{\hat{F}_{\text{Er},j}^{*2}}{m^2 \omega^4} \quad (\text{D.15})$$

$$\Leftrightarrow \hat{x}_j^{*2} \left( (1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2 \right) + 4D\eta \frac{F_C}{m\omega^2} \hat{x}_j^* + \frac{F_C^2}{m^2 \omega^4} = \frac{\hat{F}_{\text{Er},j}^{*2}}{m^2 \omega^4}. \quad (\text{D.16})$$

Der von der Vergrößerungsfunktion eines linearen Einfreiheitsgradsystems bekannte Ausdruck wird als Funktion von  $\eta$  mit

$$f_\eta = (1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2 \quad (\text{D.17})$$

abgekürzt. Die Lösung der Standardform der quadratischen Gleichung

$$\hat{x}_j^{*2} + \frac{4D\eta F_C}{f_\eta m\omega^2} \hat{x}_j^* + \frac{(F_C^2 - \hat{F}_{\text{Er},j}^{*2})}{f_\eta m^2 \omega^4} = 0 \quad (\text{D.18})$$

folgt damit zu

$$\hat{x}_j^* = -\frac{2D\eta F_C}{f_\eta m\omega^2} \pm \frac{1}{f_\eta m\omega^2} \sqrt{(2D\eta)^2 F_C^2 - f_\eta (F_C^2 - \hat{F}_{\text{Er},j}^{*2})}. \quad (\text{D.19})$$

Sämtliche Größen in Gl. (D.19) sind positiv und für den Betrag der Amplitude gilt  $\hat{x}_j^* > 0$ . Daraus folgt, dass nur das positive Vorzeichen in der Lösung zu gültigen Ergebnissen führen kann. Die Forderung  $\hat{x}_j^* > 0$  führt mit dem positiven Vorzeichen zu der Bedingung  $\hat{F}_{\text{Er},j}^* > F_C$ , womit auch sichergestellt ist, dass die Lösung rein reell ist. Die Lösung für den Betrag der Amplitude lautet schließlich

$$\hat{x}_j^* = \frac{\sqrt{\hat{F}_{\text{Er},j}^{*2} \left( (1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2 \right) - F_C^2 (1 - \eta^2)^2 - 2D\eta F_C}}{m\omega^2 \left( (1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2 \right)}. \quad (\text{D.20})$$

---

Für die Phase folgt nach Gl. (D.12) mit Gl. (D.5) und Gl. (D.6) und der gefundenen Lösung für  $\hat{x}_j^*$

$$\tan \vartheta = -\frac{2D\eta}{1-\eta^2} - \frac{F_C}{m\omega^2\hat{x}_j^*(1-\eta^2)}. \quad (\text{D.21})$$

Mit Gl. (D.20) und Gl. (D.21) ist die Schwingungsantwort vollständig beschrieben.

## E Fourierkoeffizientenbestimmung der Kontaktkraftverläufe mit der DFT

### E.1 Elasto-Gleit-Kontakt

Die diskrete Fouriertransformation (DFT) liefert durch

$$\check{F}_{\underline{X}}(k) = \frac{1}{r} \sum_{l=1}^r F_{t,X}(l+r) e^{i2\pi k(l-1)/r} ; r = \frac{l_{\max}}{2} ; X = A, B \quad (\text{E.1})$$

die Fourierkoeffizienten in komplexer Form. Von dem ermittelten Kraftverlauf wird nur der Bereich der zweiten Periode ab  $F_{t,X}(1+r)$  betrachtet. Das Resultat liefert aufgrund der Definition der DFT in Gl. (E.1) einen konjugiert komplexen Anteil und die folgende Umrechnung führt auf die Koeffizienten der grundharmonischen Komponente

$$\begin{bmatrix} \hat{F}_{t,0} \\ \hat{F}_{t,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{F}_{t,A,0} \\ \hat{F}_{t,B,0} \\ \hat{F}_{t,A,1} \\ \hat{F}_{t,B,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \check{F}_A(0) \\ \check{F}_B(0) \\ 2\Re\{\check{F}_A(1)\} + i2\Im\{\check{F}_A(1)\} \\ 2\Re\{\check{F}_B(1)\} + i2\Im\{\check{F}_B(1)\} \end{bmatrix}. \quad (\text{E.2})$$

Die auf diese Weise ermittelten Koeffizienten der nichtlinearen Kontaktkräfte sind auf die Relativbewegung bezogen und müssen noch über

$$\hat{F}_{nl,z} = \begin{bmatrix} \hat{F}_{nl,AB,0} \\ \hat{F}_{nl,AB,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{w,0}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{w,1}^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{F}_{t,0} \\ \hat{F}_{t,1} \end{bmatrix} \quad (\text{E.3})$$

zurücktransformiert werden. Das Ergebnis in Gl. (E.3) wird in das Gleichungssystem Gl. (7.36) eingesetzt und für den nächsten Iterationsschritt der Lösung verwendet.

### E.2 Reibelementkontakt

Mit der diskreten Fouriertransformation

$$\check{F}_{n,t} = \frac{1}{r} \sum_{l=1}^r F_{n,t}(l+r) e^{i2\pi(l-1)/r} ; r = \frac{l_{\max}}{2} \quad (\text{E.4})$$

werden die Koeffizienten der fundamentalen Harmonischen des Normal- und des Tangentialkraftverlaufs bestimmt. Aus dem Zwischenergebnis in Gl. (E.4) folgen die Koeffi-

zienten des betrachteten Kontaktpunktes zu

$$\underline{\hat{\mathbf{F}}}_{\text{kon}} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{F}}_n \\ \hat{\underline{F}}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\Re \{ \check{\underline{F}}_n \} + i2\Im \{ \check{\underline{F}}_n \} \\ 2\Re \{ \check{\underline{F}}_t \} + i2\Im \{ \check{\underline{F}}_t \} \end{bmatrix}. \quad (\text{E.5})$$

## Literaturverzeichnis

- [1] ADAMCZYK, J. J. ; GOLDSTEIN, M. E.: Unsteady Flow in a Supersonic Cascade with Subsonic Leading-Edge Locus. In: *AIAA Journal* 16 (1978), Nr. 12, S. 1248–1254
- [2] BALMER, B. : *Erhöhung der Dämpfung von Turbinenschaufeln durch Reibelemente*. Düsseldorf : Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 11, Nr. 197, VDI-Verlag GmbH, 1993
- [3] BORRAJO, J. M. ; ZUCCA, S. ; GOLA, M. M.: Analytical formulation of the Jacobian matrix for non-linear calculation of the forced response of turbine blade assemblies with wedge friction dampers. In: *International Journal of Non-Linear Mechanics* 41 (2006), S. 1118–1127
- [4] BOSCH, S. (Hrsg.): *Algebra*. 8. Auflage. Berlin Heidelberg : Springer Spektrum, 2013
- [5] BOTTO, D. ; ZUCCA, S. ; PAVONE, S. ; GOLA, M. M.: Parametric study of the kinematic behaviour of the underplatform damper and correlation with experimental data. In: *Proceedings of the International Conference on Noise and Vibration Engineering ISMA2008*. Leuven, Belgium, 2008
- [6] CAMERON, T. M. ; GRIFFIN, J. H.: An Alternating Frequency/Time Domain Method for Calculating the Steady-State Response of Nonlinear Dynamic Systems. In: *Journal of Applied Mechanics* 56 (1989), S. 149–154
- [7] CAMERON, T. M. ; GRIFFIN, J. H. ; KIELB, R. E. ; HOOSAC, T. M.: An Integrated Approach for Friction Damper Design. In: *Journal of Vibration and Acoustics* 112 (1990), S. 175–182
- [8] CAMPOBASSO, M. S. ; GILES, M. B.: Analysis of the Effect of Mistuning on Turbomachinery Aeroelasticity. In: *Proceedings of the IX International Symposium on Unsteady Aerodynamics, Aeroacoustics and Aeroelasticity in Turbomachines*. Grenoble, France, 2000
- [9] CARDONA, A. ; LERUSSE, A. ; GÉRADIN, M. : Fast Fourier Nonlinear Vibration Analysis. In: *Computational Mechanics* 22 (1998), S. 128–142
- [10] CARTA, F. O.: Aeroelasticity and Usteady Aerodynamics. In: [61], S. 385 – 523
- [11] CAUGHEY, T. K. ; O’KELLY, M. E. J.: Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic Systems. In: *Journal of Applied Mechanics* 32(2) (1965), S. 583–588



- [12] CIGEROGLU, E. ; AN, N. ; MENQ, C.-H. : Wedge Damper Modeling and Forced Response Prediction of Frictionally Constrained Blades. In: *Proceedings of ASME Turbo Expo 2007: Power for Land, Sea, and Air GT2007*. Montreal, Canada, 2007
- [13] CIGEROGLU, E. ; AN, N. ; MENQ, C.-H. : Forced Response Prediction of Constrained and Unconstrained Structures Coupled Through Frictional Contacts. In: *Journal for Gas Turbines and Power* 131 (2009), S. 022505–1–022505–11
- [14] CIGEROGLU, E. ; ÖZGÜVEN, N. : Nonlinear Vibration Analysis of Bladed Disks with Dry Friction Dampers. In: *Journal of Sound and Vibration* 295 (2006), S. 1028–1043
- [15] CORRAL, R. ; GALLARDO, J. M. ; IVATURI, R. : Conceptual Analysis of the Non-Linear Forced Response of Aerodynamically unstable Bladed-Discs. In: *Proceedings of ASME Turbo Expo 2013: Turbine Technical Conference and Exposition GT2013*. San Antonio, Texas, USA, 2013
- [16] DEN HARTOG, J. P.: Transmission Line Vibration due to Sleet. In: *Presented at the Summer Convention of the A.I.E.E.: Cleveland, Ohio, June 20-June 24, 1932*. A.I.E.E., 1932 (Transactions of the A.I.E.E.)
- [17] DOMINIC, R. : Parametric Study of Turbine Blade Platform Friction Damping Using the Lumped Parameter Analysis. In: *ASME International Gas Turbine Conference*. Netherlands, 1984
- [18] DOWELL, E. H. (Hrsg.): *A Modern Course in Aeroelasticity*. Fourth Revised and Enlarged Edition. Dordrecht : Springer, 2005
- [19] DUBAS, M. : Über die Erregung infolge der Periodizität von Turbomaschinen. In: *Ingenieur Archiv*. 54. Springer, 1984, S. 413–426
- [20] EKICI, K. ; KIELB, R. E. ; HALL, K. C.: Aerodynamic Asymmetry Analysis of Unsteady Flows in Turbomachinery. In: *Proceedings of ASME Turbo Expo 2008: Power for Land, Sea, and Air GT2008*. Berlin, Germany, 2008
- [21] EKICI, K. ; KIELB, R. E. ; HALL, K. C.: The Effect of Aerodynamic Asymmetries on Turbomachinery Flutter. In: *Journal of Fluids and Structures* 63 (2013), S. 1–17
- [22] EWINS, D. J.: *Modal Testing*. Second Edition. Baldock, Herfordshire, England : Research Studies Press, 2000
- [23] FEINER, D. M. ; H., G. J.: A Fundamental Model of Mistuning for a Single Family of Modes. In: *Journal of Turbomachinery* 124 (2002), S. 597–605
- [24] FIRRONE, C. M.: Measurement of the Kinematics of two Underplatform Dampers with Different Geometry and Comparison with Numerical Simulation. In: *Journal of Sound and Vibration* 323 (2009), S. 313–333
- [25] FIRRONE, C. M. ; ZUCCA: Underplatform Dampers for Turbine Blades: The Effect of Damper Static Balance on the Blade Dynamics. In: *Mechanics Research Communications* 36 (2009), S. 515–522

- [26] FIRRONE, C. M. ; ZUCCA, S. ; GOLA, M. M.: Effect of Static/Dynamic Coupling on the Forced Response of Turbine Bladed Disks with Underplatform Dampers. In: *Proceedings of ASME Turbo Expo 2009: Power for Land, Sea, and Air GT2009*. Orlando, Florida, USA, 2009
- [27] FIRRONE, C. M. ; ZUCCA, S. ; GOLA, M. M.: The Effect of Underplatform Dampers on the Forced Response of Bladed Disks by a Coupled Static/Dynamic Harmonic Balance Method. In: *International Journal of Non-Linear Mechanics* 46 (2011), S. 363–375
- [28] FREITAG, E. ; BUSAM, R. : *Funktionentheorie 1*. 4., korrigierte und erweiterte Auflage. Berlin Heidelberg : Springer, 2006
- [29] GALLUS, H. : *Gestaltungsrichtlinien zur Reduzierung von Schaufelschwingungsanregungen infolge instationärer Schaufeldruckverteilungen*. Westdeutscher Verlag, 1981 (Forschungsberichte des Landes Nordrhein-Westfalen / Fachgruppe Maschinenbau/-Verfahrenstechnik)
- [30] GASCH, R. ; KNOTHE, K. ; LIEBICH, R. : *Strukturdynamik*. 2. Auflage. Berlin Heidelberg : Springer Vieweg, 2012
- [31] GOLA, M. M. ; SANTOS, M. Braga d. ; TONG, L. : Measurement of the Scatter of Underplatform Damper Hysteresis Cycle: Experimental Approach. In: *Proceedings of the ASME 2012 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference IDETC/CIE 2012*. Chicago, IL, USA, 2012
- [32] GÖTTING, F. ; SEXTRO, W. ; PANNING, L. ; POPP, K. : Systematic Mistuning of Bladed Disk Assemblies with Friction Contacts. In: *Proceedings of ASME Turbo Expo 2004: Power for Land, Sea, and Air*. Vienna, Austria, 2004
- [33] GRIFFIN, J. H.: An Analytical Comparison of Blade-to-Blade and Blade-to-Ground Dampers for Use in Gas Turbine Engines. In: *Proceedings of the Eighth Canadian Congress of Applied Mechanics*. Moncton, NB, Canada, 1981
- [34] HERRMANN, N. : *Höhere Mathematik*. München : Oldenbourg Verlag, 2004
- [35] IRRETIER, H. : *Grundlagen der Schwingungstechnik 2*. Braunschweig/Wiesbaden : Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, 2001
- [36] IWAN, W. D.: On a Class of Models for the Yielding Behavior of Continuous and Composite Systems. In: *Journal of Applied Mechanics* 34(3) (1967), S. 612–617
- [37] JÄNICH, K. : *Funktionentheorie*. 6. Auflage. Heidelberg : Springer, 2004
- [38] JARELAND, M. H.: A Parametric Study of a Cottage-Roof Damper and Comparison with Experimental Results. In: *Proceedings of ASME Turbo Expo 2001*. Louisiana, New Orleans, USA, 2001
- [39] JAROSCH, J. : *Beitrag zum Schwingungsverhalten gekoppelter Schaufelsysteme*. Stuttgart : Institut für Thermische Strömungsmaschinen und Maschinenlaboratorium der Universität Stuttgart, Dissertation, 1983

- [40] JOHNSON, K. L.: *Contact Mechanics*. Cambridge : Cambridge University Press, 1989
- [41] KÁRMÁN, T. von: Über den Mechanismus des Widerstandes, den ein bewegter Körper in einer Flüssigkeit erfährt. In: *Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften* (1911), S. 509–517
- [42] KAZA, K. R. V. ; KIELB, R. E.: Flutter and Response of a Mistuned Cascade in Incompressible Flow. In: *AIAA Journal* 20 (1982), S. 1120–1127
- [43] KELLY, F. ; HEIKURINEN, K. ; FAZARI, E. ; WU, Y. : *Intentionally Mistuned Integrally Bladed Rotor*. Version: Okt. 25 2011. <http://www.google.com.ar/patents/US8043063>, Abruf: 10.12.2014 Patent No.: 8,043,063 B2
- [44] KIELB, R. ; BARTER, J. ; CHERNYCHEVA, O. ; FRANSSON, T. : Flutter of Low Pressure Turbine Blades with Cyclic Symmetric Modes: A Preliminary Design. In: *Journal of Turbomachinery* 126(2) (2004), S. 306–309
- [45] KIELB, R. E. ; GRIFFIN, J. H. ; FEINER, D. M. ; MIYAKOZAWA, T. : Flutter of Mistuned Bladed Disks with Aerodynamic and FMM Structural Coupling. In: *Proceedings of ASME Turbo Expo 2004: Power for Land, Sea, and Air*. Vienna, Austria, 2004
- [46] KIELB, R. E. ; HALL, K. C. ; MIYAKOZAWA, T. : The Effect of Unsteady Aerodynamic Asymmetric Perturbations on Flutter. In: *Proceedings of ASME Turbo Expo 2007: Power for Land, Sea, and Air GT2007*. Montreal, Canada, 2007
- [47] KIELB, R. E. ; KAZA, K. R. V.: Aeroelastic Characteristics of a Cascade of Mistuned Blades in Subsonic and Supersonic Flows. In: *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design* 105 (1983), S. 425–433
- [48] KOHNKE, P. (Hrsg.): *Ansys Mechanical APDL Theory Reference*. Ansys, Inc., 2013
- [49] KULINA, M. R.: *Turbine Rotor and Blade Configuration*. Version: Jun. 27 1978. <http://www.google.com.ar/patents/US4097192>, Abruf: 14.02.2015 Patent No.: 4,097,192
- [50] LAXALDE, D. ; THOUVEREZ, F. ; SINOUE, J.-J. ; LOMBARD, J.-P. : Forced Response Analysis of Blisks with Friction Ring Dampers. In: *7th IFToMM-Conferende on Rotor Dynamics*. Vienna, Austria, 2006
- [51] LAXALDE, D. ; THOUVEREZ, F. ; SINOUE, J.-J. ; LOMBARD, J.-P. : Qualitative Analysis of Forced Response of Blisks with Friction Ring Dampers. In: *Journal of Mechanics A/Solids* 26 (2007), S. 676–687
- [52] LECHNER, C. ; SEUME, J. : *Stationäre Gasturbinen*. 2., neu bearbeitete Auflage. Heidelberg Dordrecht London New York : Springer, 2010
- [53] LOGAN, E. J. ; ROY, R. : *Handbook of Turbomachinery*. Second Edition, Revised and Expanded. New York Basel : Marcel Dekker, Inc., 2003
- [54] MENQ, C.-H. ; BIELAK, J. ; GRIFFIN, J. H.: The Influence of Microslip on Vibratory Response, Part I: A New Microslip Model. In: *Journal of Sound and Vibration* 107(2) (1986), S. 279–293

- [55] MENQ, C.-H. ; GRIFFIN, J. H. ; BIELAK, J. : The Influence of Microslip on Vibratory Response, Part II: A Comparison with Experimental Results. In: *Journal of Sound and Vibration* 107(2) (1986), S. 295–307
- [56] MONTGOMERY, M. ; BYRNE, W. ; BLOCK, R. ; SILKOWSKI, P. ; SRINIVASAN, S. : *Mistuned Rotor Blade Array for Passive Flutter Control*. Version: Aug. 6 2002. <https://www.google.com/patents/US6428278>, Abruf: 10.12.2014 Patent No.: 6,428,278 B1
- [57] MONTGOMERY, M. ; OROSA, J. ; SAMIT, M. : *Turbomachine Rotor with Blades of Different Frequency*. Version: Jun. 23 2010. <https://www.google.com/patents/EP1211382B1>, Abruf: 10.12.2014 EP 1 211 382 B1
- [58] MURTHY, R. ; MIGNOLET, M. P.: On the Benefits of Intentional Mistuning of Friction Dampers to Reduce the Response of Tuned and Mistuned Bladed Disks. In: *Proceedings of ASME Turbo Expo 2013: Turbine Technical Conference and Exposition*. San Antonio, Texas, USA, 2013
- [59] MUSZYNSKA, A. ; JONES, D. I. G.: A Parametric Study of Dynamic Response of a Discrete Model of Turbomachinery Bladed Disk. In: *Journal of Vibration and Acoustics* 105(4) (1983), S. 434–443
- [60] NACIVET, S. ; PIERRE, C. ; THOUVEREZ, F. ; JEZEQUEL, L. : A dynamic Lagrangian Frequency-Time Method for the Vibration of Dry-Friction-Damped Systems. In: *Journal of Sound and Vibration* 265 (2003), S. 201–219
- [61] OATES, G. C. (Hrsg.): *Aircraft Propulsion Systems Technology and Design*. Washington, DC : AIAA Education Series, 1989 . – Third Printing
- [62] O'KELLY, M. E. J.: *Vibration of Viscoously Damped Linear Dynamic Systems*, Diss., 1964
- [63] OLSON, B. J. ; SHAW, S. W. ; SHI, C. ; PIERRE, C. ; PARKER, R. G.: Circulant Matrices and Their Application to Vibration Analysis. In: *Applied Mechanics Reviews* 66 (2014), S. 040803–1–040803–41
- [64] PANNING, L. : *Auslegung von Reibelementen zur Schwingungsdämpfung von Turbinenschaufeln*. Düsseldorf : Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 11, Nr. 328, VDI-Verlag GmbH, 2005
- [65] PANNING, L. ; POPP, K. ; SEXTRO, W. ; FLORIAN, G. ; KAYSER, A. ; WOLTER, I. : Asymmetrical Underplatform Dampers in Gas Turbine Bladings: Theory and Application. In: *Proceedings of ASME Turbo Expo 2004*. Vienna, Austria, 2004
- [66] PANNING, L. ; SEXTRO, W. ; POPP, K. : Optimization of Interblade Friction Damper Design. In: *Proceedings of ASME Turbo Expo 2000*. Munich, Germany, 2000
- [67] PATSIAS, S. ; DOODY, P. ; ELLIOTT, R. : Optimisation of Turbine Blade Shroud and Under-Platform Dampers: Part 1-Experimental. In: *Proceedings of the 12th International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery ISRO-MAC12*. Honolulu, Hawaii, 2008

- [68] PETROV, E. P.: A Method for Use of Cyclic Symmetry Properties in Analysis of Nonlinear Multiharmonic Vibrations of Bladed Disks. In: *Journal of Turbomachinery* 126 (2004), S. 175–183
- [69] PETROV, E. P.: Explicit Finite Element Models of Friction Dampers in Forced Response Analysis of Bladed Discs. In: *Proceedings of GT2007 ASME Turbo Expo 2007: Power for Land, Sea and Air*. Montreal, Canada, 2007
- [70] PETROV, E. P.: A Method for Forced Response Analysis of Mistuned Bladed Discs with Aerodynamic Effects Included. In: *Proceedings of ASME Turbo Expo 2009: Power for Land, Sea and Air GT2009*. Orlando, FL, USA, 2009
- [71] PETROV, E. P.: Reduction of Forced Response Levels for Bladed Discs by Mistuning: Overview of the Phenomenon. In: *Proceedings of ASME Turbo Expo 2010: Power for Land, Sea and Air GT2010*. Glasgow, UK, 2010
- [72] PETROV, E. P. ; EWINS, D. J.: Analytical Formulation of Friction Interface Elements for Analysis of Nonlinear Multi-Harmonic Vibrations of Bladed Disks. In: *Journal of Turbomachinery* 125(2) (2003), S. 364–371
- [73] PETROV, E. P. ; EWINS, D. J.: Advanced Modelling of Underplatform Friction Dampers for Analysis of Bladed Disc Vibration. In: *Proceedings of GT2006 ASME Turbo Expo 2006: Power for Land, Sea and Air*. Barcelona, Spain, 2006
- [74] PFEIFFER, F. ; GLOCKER, C. : *Multibody Dynamics with Unilateral Contacts*. Weinheim : John Wiley & Sons. Inc., 1996
- [75] PHADKE, R. ; BERGER, E. J.: Friction Damping Analysis in Turbine Blades Using a User-Programmed Function in Ansys. In: *Proceedings of the 12th International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery ISROMAC12*. Honolulu, Hawaii, 2008
- [76] PLATZER, M. F. ; CARTA, F. O.: *AGARD Manual on Axial Turbomachines Volume 1: Unsteady Turbomachinery Aerodynamics*. NATO Advisory Group for Aerospace Research and Development, 1987
- [77] POPOV, V. L.: *Contact Mechanics and Friction*. Berlin Heidelberg : Springer, 2010
- [78] POPP, K. ; MAGNUS, K. ; SEXTRO, W. : *Schwingungen*. 9., überarbeitete Auflage. Wiesbaden : Springer Vieweg, 2013
- [79] POUDOU, O. ; PIERRE, C. : Hybrid Frequency-Time Domain Methods for the Analysis of Complex Structural Systems with Dry Friction Damping. In: *44th AIAA/ASME/ASCE/AHS Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*. Norfolk, Virginia, 2003
- [80] SALVAT, N. ; BATAILLY, A. ; LEGRAND, M. : Modeling of Abradable Coating Removal in Aircraft Engines Through Delay Differential Equations. In: *Proceedings of ASME Turbo Expo 2013: Turbine Technical Conference and Exposition*. San Antonio, Texas, USA, 2013

- [81] SANLITURK, K. Y. ; EWINS, D. J. ; STANBRIDGE, A. B.: Underplatform Dampers for Turbine Blades: Theoretical Modeling, Analysis, and Comparison with Experimental Data. In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 123 (2001), S. 919–929
- [82] SCHABACK, R. ; WENDLAND, H. : *Numerische Mathematik*. 5., vollständig neu bearbeitete Auflage. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 2005
- [83] SCHMIEDER, G. : *Analysis*. Braunschweig Wiesbaden : Vieweg, 1994
- [84] SCHÖNENBORN, H. ; JUNGE, M. ; RETZE, U. : Contribution to Free and Forced Vibration Analysis of an Intentionally Mistuned Blisk. In: *Proceedings of ASME Turbo Expo 2012: GT2012*. Copenhagen, Denmark, 2012
- [85] SEXTRO, W. : *Dynamical Contact Problems with Friction*. Berlin Heidelberg : Springer, 2007
- [86] SEYDEL, R. : *Practical Bifurcation and Stability Analysis*. Third Edition. New York Dordrecht Heidelberg London : Springer, 2010
- [87] SIEWERT, C. ; PANNING, L. ; WALLASCHEK, J. : Nonlinear Multiharmonic Vibrations of Coupled Turbine Bladings. In: *SIRM 2009 - 8th International Conference on Vibrations in Rotating Machines*. Vienna, Austria, 2009
- [88] SIEWERT, C. ; PANNING, L. ; WALLASCHEK, J. ; RICHTER, C. : Multiharmonic Forced Response Analysis of a Turbine Blading Coupled by Nonlinear Contact Forces. In: *Proceedings of ASME Turbo Expo 2009: Power for Land, Sea and Air*. Orlando, Florida, USA, 2009
- [89] SINHA, A. ; GRIFFIN, J. H.: Friction Damping of Flutter in Gas Turbine Engine Airfoils. In: *Journal of Aircraft* 20 (1983), Nr. 4, S. 372–376
- [90] SINHA, A. ; GRIFFIN, J. H.: Stability of Limit Cycles in Frictionally Damped and Aerodynamically Unstable Rotor Stages. In: *Journal of Sound and Vibration* 103(3) (1985), S. 341–356
- [91] SINHA, A. ; GRIFFIN, J. H. ; KIELB, R. E.: Influence of Friction Dampers on Torsional Blade Flutter. In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 108(2) (1986), S. 313–318
- [92] SRINIVASAN, A. V.: Flutter and Resonant Vibration Characteristics of Engine Blades. In: *Papers Presented at the International Gas Turbine & Aeroengine Congress & Exhibition: Orlando, Florida, June 2-June 5, 1997*. American Society of Mechanical Engineers, 1997 (Transactions of the ASME)
- [93] STRANG, G. : *Wissenschaftliches Rechnen*. Berlin Heidelberg : Springer, 2010
- [94] THEODORSEN, T. : General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter / National Advisory Committee for Aeronautics, Report No. 496. 1935. – Forschungsbericht

- [95] THOMAS, D. L.: Standing Waves in Rotationally Periodic Structures. In: *Journal of Sound and Vibration* 37(2) (1974), S. 288–290
- [96] THOMAS, D. L.: Dynamics of Rotationally Periodic Structures. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 14 (1979), S. 81–102
- [97] TRAUPEL, W. : *Thermische Turbomaschinen*. Bd. 2. 4. Auflage. Berlin Heidelberg : Springer, 2001
- [98] WHITEHEAD, D. S.: Force and Moment Coefficients for Vibrating Aerofoils in Cascade / Reports and Memoranda, No. 3254. 1962. – Forschungsbericht
- [99] WILSON, E. L. ; PENZIEN, J. : Evaluation of Orthogonal Damping Matrices. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 4 (1972), S. 5–10
- [100] WRIGGERS, P. : *Computational Contact Mechanics*. Second Edition. Berlin Heidelberg : Springer, 2006
- [101] YANG, B. D. ; CHU, M. L. ; MENQ, C. H.: Stick-Slip-Separation Analysis and Non-Linear Stiffness and Damping Characterization of Friction Contacts Having Variable Normal Load. In: *Journal of Sound and Vibration* 210(4) (1998), S. 461–481
- [102] YANG, B. D. ; MENQ, C. H.: Characterization of Contact Kinematics and Application to the Design of Wedge Dampers in Turbomachinery Blading: Part 1 – Stick-Slip Contact Kinematics. In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 120(2) (1998), S. 410–417
- [103] YANG, B. D. ; MENQ, C. H.: Characterization of Contact Kinematics and Application to the Design of Wedge Dampers in Turbomachinery Blading: Part 2 – Prediction of Forced Response and Experimental Verification. In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 120(2) (1998), S. 418–423
- [104] ZARIMAHALLEH, G. G. ; TORABIDEH, R. ; ZOKA, H. T. ; ZAD, A. J.: *Intentionally Frequency Mistuned Turbine Blades*. Version: Febr. 20 2014. <http://www.google.com/patents/US20140050590>, Abruf: 10.12.2014 Pub. No.: US 2014/0050590 A1
- [105] ZUCCA, S. ; BORRAJO, J. ; GOLA, M. M.: Forced Response of Bladed Disks in Cyclic Symmetry with Underplatform Dampers. In: *Proceedings of GT2006 ASME Turbo Expo 2006: Power for Land, Sea and Air*. Barcelona, Spain, 2006
- [106] ZUCCA, S. ; BOTTO, D. ; GOLA, M. M.: Range of Variability in the Dynamics of Semi-Cylindrical Dampers for Turbine Blades. In: *Proceedings of ASME Turbo Expo 2008: Power for Land, Sea and Air GT2008*. Berlin, Germany, 2008
- [107] ZUCCA, S. ; FIRRONE, C. M.: Nonlinear Dynamics of Mechanical Systems with Friction Contacts: Coupled Static and Dynamic Multi-Harmonic Balance Method and Multiple Solutions. In: *Journal of Sound and Vibration* 333 (2014), S. 916–926
- [108] ZUCCA, S. ; FIRRONE, C. M. ; GOLA, M. : Coupled Static/Dynamic Modeling of Wedge Dampers for Turbine Blades. In: *Proceedings of ASME Turbo Expo 2010: Power for Land, Sea and Air GT2010*. Glasgow, UK, 2010